РАЗДЕЛ 2. ЭКОНОМИКА И ПРЕДПРИНИМАТЕЛЬСТВО

DOI 10.54220/v.rsue.1991-0533.2023.81.1.011

Г. А. Батищева, А. В. Братищев, М. И. Журавлёва

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ РЕГУЛИРОВАНИЯ ДЕНЕЖНЫХ И ТОВАРНЫХ ПОТОКОВ

Аннотация

В статье проводится полный бифуркационный анализ математической модели динамической системы «Возникновение планового регулирования денежных и товарных потоков». С помощью преобразования Пуанкаре исследовано поведение траекторий на бесконечности. С помощью теоретического анализа и численного эксперимента в пакете Matlab получен фазовый портрет системы и построена система аддитивного управления денежных и товарных потоков. Выделен класс допустимых достижимых состояний.

Ключевые слова

Денежный и товарный потоки, состояние равновесия, фазовый портрет, устойчивость, агрегированная переменная, положение равновесия.

G. A. Batichsheva, A. V. Bratishchev, M. I. Zhuravlyova

MATHEMATICAL ANALYSIS AND MANAGEMENT OF DYNAMIC SYSTEM OF REGULATION OF CASH AND COMMODITY FLOWS

Annotation

Article provides a complete bifurcation analysis of mathematical model of dynamic system «Emergence of planned regulation of cash and commodity flows». Using Poincare transform, behavior of trajectories at infinity is investigated. With help of theoretical analysis and numerical experiment in Matlab package, phase portrait of system was obtained and system of additive control of cash and commodity flows was built. Class of permissible achievable states is highlighted.

Keywords

Cash and commodity flows, equilibrium state, phase portrait, stability, aggregated variable, equilibrium position.

Введение

Одной из важнейших функций органов управления, как в рыночной, так и в плановой экономике, является функция по регулированию денежной массы и поддержанию материально-финансовой сбалансированности экономики. В настоящее время в условиях экономического кризиса для принятия правильных управленческих решений представляет особый интерес изучение вопросов, касающихся разработки и внедрения в практику экономического управления методов, позволяющих обеспечить сбалансированность в экономике товарных и финансовых потоков [9].

Материалы и методы

В работе [5] с помощью качественной теории динамических систем [1] был проведен бифуркационный анализ, а с помощью теории синергетического управления [6] спроектирован синергетический регулятор динамической системы «Посредническая деятельность». В настоящей

статье подобные задачи решаются для динамической системы «Возникновение планового регулирования», математическая модель которой имеет вид [8]:

$$\begin{cases} x_t' = a_1 x + a_2 y - a_3 xy \\ y_t' = -b_1 xy + b_2 y^2 \end{cases}, \quad a_i, b_j > 0. \ (1)$$

Здесь фазовая переменная x(t) — денежные средства, находящиеся в распоряжении организаций, монополий, кооперативов; y − обобщенный товар, количество которого на рынке в данный момент времени равно фазовой переменной y(t). Скорость роста денежных средств x_t' складывается из денежных средств $a_1 x$, помещенных в банк, покупки товара $a_3 xy$ и оплаты потребителями товара его морального и физического износа $a_2 y$. Скорость роста количества товара y_t' определяется его продажей $b_1 xy$ и целенаправленным его производством $b_2 y^2$.

В статье используется полный бифуркационный анализ системы. Он предполагает определение топологической структуры всех состояний равновесия системы.

Заметим, что ось *OX* фазовой плоскости системы (1) составлена из двух траекторий, задаваемых уравнениями

$$\begin{cases} x_t' = a_1 x \\ y = 0 \end{cases}.$$

Она разделяет искомые элементарные ячейки [1] верхней и нижней фазовых полуплоскостей независимо от значений параметров a_i, b_j.

Система (1) имеет 2 состояния равновесия:

$$S_1 = (0,0), S_2 = \left(\frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_3 b_1}, \frac{a_2 b_1 + a_2 b_1}{a_3 b_2}\right).$$

$S_1 = (0,0)$ является кратным состоянием равновесия [1]. Приводя систему к каноническому виду и применяя теорему о классификации кратных состояний равновесия, устанавливаем, что S_1 является седло-узлом. Его узловой сектор неустойчив и расположен в верхней полуокрестности, а два седловых сектора — в нижней полуокрестности S_1 .

С помощью теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению [7] устанавливается, что находящееся в первой четверти состояние S_2 является седлом.

Результаты и обсуждение

Численный эксперимент. На рисунках 1, 2 показаны результаты вычислительного эксперимента на S-модели [3] рассматриваемой системы с параметрами $a_i = b_j = 1$.

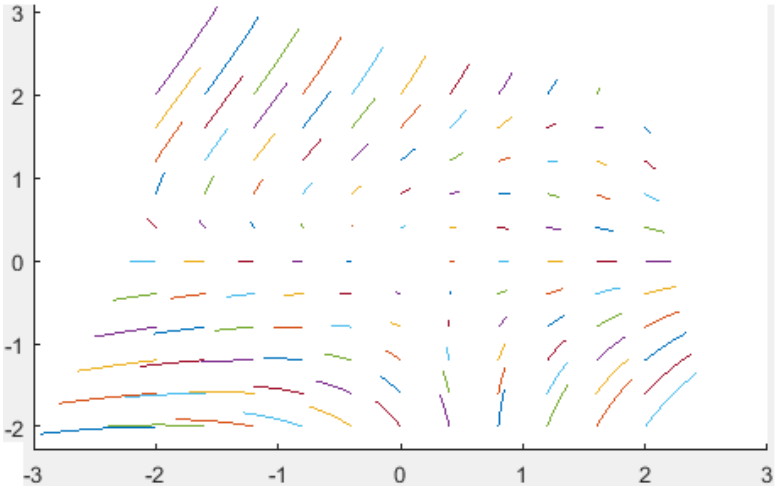

Рисунок 1 — **Фазовый портрет системы (1) в окрестности S_1**

Ниже седло-узла $S_1 = (0,0)$ расположены два седловых сектора.
$S_2 = (2,2)$− седло.

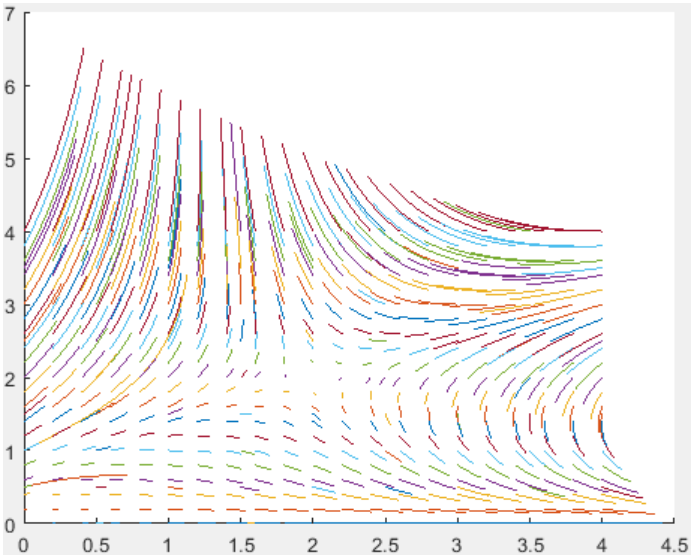

Рисунок 2 — **Фазовый портрет системы в окрестности S_2 (1)**

Состояния равновесия системы (1) на бесконечности исследуются в два приема. Состояния, отличные от точек (0, ±∞), исследуются с помощью преобразования Пуанкаре исходных переменных: $x = 1/u\,, y = v/u$. Имеем

$$\begin{cases} u_t' = u(-a_1 u + a_3 v - a_2 uv) \\ v_t' = v(-b_1 - a_1 u + (a_3 + b_2)v - a_2 uv) \end{cases} \quad (2)$$

Эта система имеет три состояния равновесия.

Состояние $S_1' = (0,0)$ имеет является кратным. Так как система уже имеет канонический вид, то по теореме о классификации кратных состояний оно является седло-узлом с устойчивым узловым сектором в правой полуокрестности S_1' u,v-плоскости. Поскольку последняя отображается обратным преобразованием в окрестность точки (+∞, 0) исходного фазового пространства, то к (+∞, 0) стягиваются траектории системы (1).

Левая полуокрестность состояния состоит из двух седловых секторов. Они отображаются в седловые секторы окрестности точки (-∞, 0).

Состояние $S_2' = \left(0, \frac{b_1}{a_3 + b_2}\right)$ является неустойчивым узлом системы (2).

Его прообразом являются две бесконечно удаленные точки прямой $y = \frac{b_1}{a_3 + b_2} x$ исходного фазового пространства. Правая неустойчивая полуокрестность точки S_2' переходит в неустойчивую окрестность правой верхней бесконечно удаленной точки. Левая неустойчивая полуокрестность точки S_2' переходит, как показывает численный эксперимент с S-моделью системы (2), в устойчивую окрестность левой нижней бесконечно удаленной точки.

Третье состояние равновесия является образом состояния S_2 исходной системы. Состояния, отличные от точек (±∞, 0), исследуются с помощью преобразования Пуанкаре исходных переменных $x = v/u\,, y = 1/u$. Имеем

$$\begin{cases} u_t' = u(-b_2 + b_1 v) \\ v_t' = a_2 u - (a_3 + b_2)v + a_1 uv + b_1 v^2 \end{cases} \quad (3)$$

Эта система также имеет три состояния равновесия.

Состояние $S_1'' = (0,0)$ является устойчивым узлом. Его правая полуокрестность u,v-плоскости отображается обратным преобразованием Пуанкаре в устойчивую окрестность точки (0,+∞). Левая устойчивая полуокрестность переходит, как показывает численный эксперимент с S-моделью системы (3), в неустойчивую окрестность точки (0,-∞).

Таким образом, система (1) имеет два конечных и три бесконечных состояния равновесия. Установлено поведение траекторий в окрестности этих состояний. Вместе с численным экспериментом на S-модели это позволяет получить схему фазового портрета системы (1) (рис. 2).

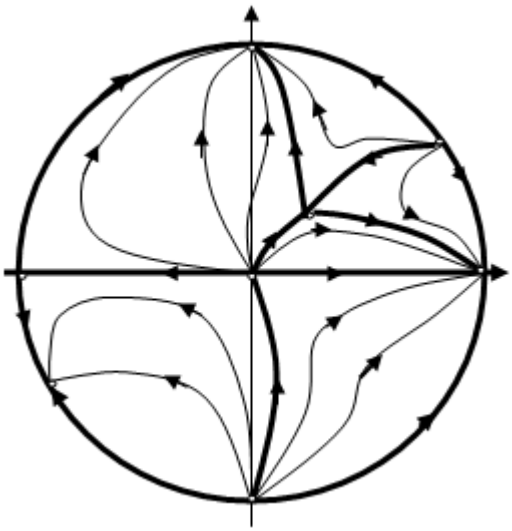

Рисунок 3 — **Схема фазового портрета системы (1)**

Выводы

Портрет состоит из 6 элементарных ячеек. Система не имеет бифуркаций в открытой первой четверти фазовой плоскости. Фазовые портреты при любых положительных наборах параметров будут топологически эквивалентны.

Замечание. Все траектории первой четверти кроме двух сепаратрис стягиваются к точкам (+∞,0) или (0,+∞). С экономической точки зрения либо неограниченно возрастает количество товара (перепроизводство), либо неограниченно возрастает количество денег (инфляция). В связи с этим возникает задача управления этими процессами с тем, чтобы траектории управляемой системы стягивались к наперед заданному конечному состоянию.

Построение синергетического регулятора системы (1).

Применим метод АКАР (аналитического конструирования агрегированных регуляторов) [5, 6, 8] для решения поставленной задачи управления динамической системой регулирования денежных и товарных потоков, чтобы при любых их начальных состояниях соответствующие траектории стягивались с течением времени к одному и тому наперед заданному состоянию (x_0, y_0)?

Управление ищется в виде аддитивного слагаемого скорости изменения соответствующей величины и является функцией текущего состояния системы [2, 5].

Уравнение регулятора имеет вид:

$$\begin{cases} x_t' = a_1\mathrm{x(t)} + a_2\mathrm{y(t)} - a_3\mathrm{x(t)y(t)} + u_1\,\mathrm{(t)} \\ y_t' = -b_1\mathrm{x(t)y(t)} + b_2 y^2(t) \end{cases}. \qquad (4)$$

Согласно методу АКАР [6] управление строится с помощью подбора подходящей функции (называемой агрегированной переменной) $\psi_1(x, y)$, которая определяет притягивающее инвариантное многообразие $\psi_1(x, y) = 0$ проектируемого регулятора.

Требуется, чтобы производная этой функции в силу (4) удовлетворяла на траекториях дифференциальному уравнению:

$$\psi_{1,t}' = (-1/\mathrm{T})\psi.$$

Последнее имеет решение

$$\psi_1(x(t), y(t) = C\exp\{-t/T\} \longrightarrow 0 \text{ при } t \longrightarrow +\infty.$$

Именно в этом смысле и понимается притягиваемость многообразия для всех траекторий регулятора. Это свойство многообразия можно назвать устойчивостью в смысле А.А. Колесникова [6]. Заметим, что она не равносильна устойчивости инвариантного множества в смысле Зубова [4].

Из уравнения $\psi_{1,t}^{'} = \psi_{1,x}^{'}x_t^{'} + \psi_{1,y}^{'}(-b_1xy + b_2y^2) =$ (-1/T)ψ выводим уравнение регулятора

$$\begin{cases} x_t^{'} = \dfrac{-1}{\psi_{1,x}^{'}}\left(\psi_{1,y}^{'}(-b_1xy + b_2y^2) + \dfrac{1}{T}\psi_1\right) \\ y_t^{'} = -b_1\text{xy} + b_2y^2 \end{cases}$$

и управление

$$u_t := -(a_1\text{x} + a_2\text{y} - a_3xy) - \frac{1}{\psi_{1,x}^{'}}\left(\psi_{1,y}^{'}(-b_1xy + b_2y^2) + \frac{1}{T}\psi_1\right).$$

Согласно [6] состояние равновесия является решением функциональной системы

$$\begin{cases} \psi_1(x,y) = 0 \\ y(-b_1\text{x} + b_2y) = 0 \end{cases},$$

а значит лежит на прямых $y = 0, y = (b_1/b_2)x$. Выберем агрегированную переменную $\psi_1(x,y) := x - cy^3$ с параметром $c > 0$. Решение системы с ненулевыми координатами имеет вид :

$$\begin{cases} x_0 = \frac{b_2}{b_1}\sqrt{b_2/b_1c} \\ y_0 = \sqrt{b_2/b_1c} \end{cases}.$$

Проверим условие асимптотической устойчивости [6]:

$$f_{2y}^{'} - \frac{\psi_{1y}^{'}}{\psi_{1x}^{'}}f_{2x}^{'}\Big|_{(x_0,y_0)} = -2b_2\sqrt{\frac{b_1}{b_2c}} < 0.$$

То есть (x_0, y_0) устойчиво. Численные эксперименты с S-моделью построенного регулятора при различных наборах параметров и начальных условий из первой четверти свидетельствуют, что состояние (x_0, y_0) обладает свойством устойчивости в целом.

Выводы

1) С помощью выбранной агрегированной переменной при фиксированных значениях параметров b_1, b_2 можно проектировать управление количеством товара при достижении только состояний с координатами $\left(\frac{b_2}{b_1}\sqrt{(b_2/b_2c}, \sqrt{(b_2/b_1c}\right), c > 0$, то есть лежащих на ветви кубической параболы $x = cy^3$.

2) Если же поставлена цель достигнуть произвольное (заданное) состояние (x_0, y_0), $x_0, y_0 > 0$, то в этом случае следует изменять параметры товара b_1, b_2, которые должны удовлетворять равенству: $b_2/\, b_1 = x_0y_0$.

Пусть теперь уравнение регулятора имеет вид:

$$\begin{cases} x_t^{'} = a_1x(t) + a_2y(t) - a_3x(t)y(t) \\ y_t^{'} = -b_1x(t)y(t) + b_2y^2(t) + u_2(t) \end{cases}.$$

Ищем агрегированную переменную $\psi_2(x,y)$, удовлетворяющую уравнению $\psi_{2,t}^{'} =$ (-1/T)ψ_2 на траекториях регулятора. Из уравнения

$$\psi_{2,t}^{'} = \psi_{2,x}^{'}(a_1\text{x} + a_2y - a_3\text{xy}) + \psi_{2,y}^{'}y^{'} = \text{(-1/T)}\psi_2$$

выводим уравнение регулятора

$$\begin{cases} x_t^{'} = a_1\text{x} + a_2\text{y} - a_3\text{xy} \\ y_t^{'} = \dfrac{-1}{\psi_{2,y}^{'}}\left(\psi_{2,x}^{'}(a_1\text{x} + a_2\text{y} - a_3\text{xy}) + \dfrac{1}{T}\psi_2\right) \end{cases}$$

и управление

$$u_t = b_1xy - b_2y^2 - \frac{1}{\psi_{2,y}^{'}}.\left(\psi_{2,x}^{'}(a_1\text{x} + a2\text{y} - a3\text{xy}) + 1T\psi 2.\right.$$

Состояние равновесия регулятора является решением функциональной системы

$$\begin{cases} a_1\text{x} + a_2\text{y} - a_3\text{xy} = 0 \\ \psi_2(x,y) = 0 \end{cases}, \qquad (5)$$

а значит лежит на гиперболе $y = a_1x/(a_3x - a_2)$, проходящей через начало координат. Выберем агрегированную переменную $\psi_2 := x - cy^2$ с параметром $c > 0$. Решение системы с положительными координатами единственно (рис. 3) и имеет вид:

$$\begin{cases} x_0 = cy_0^2 \\ y_0 = \dfrac{a_1c + \sqrt{a_1^2c^2 + 4a_2}}{2a_3c} \end{cases}. \qquad (6)$$

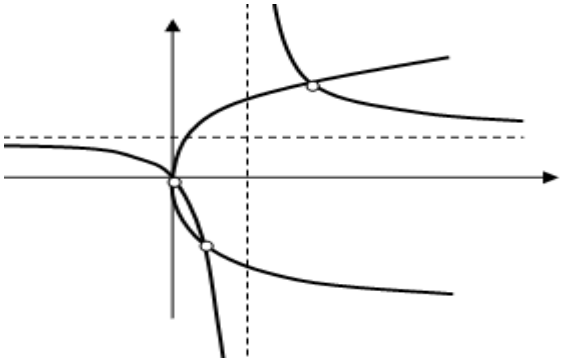

Рисунок 4 — **График системы (5)**

Проверим условие асимптотической устойчивости [6]:

$$f_{1x}^{'} - \frac{\psi_{2x}^{'}}{\psi_{2y}^{'}} f_{1y}^{'}\Big|_{(x_0,y_0)} = -\frac{\sqrt{a_1^2c^2 + 4a_2a_3}}{2c} < 0.$$

То есть (x_0, y_0) устойчиво.

Численные эксперименты с S-моделью построенного регулятора при различных наборах параметров и начальных условий из первой четверти свидетельствуют, что состояние (x_0, y_0) обладает свойством устойчивости в целом.

Выводы

1) С помощью выбранной агрегированной переменной при фиксированных значениях параметров a_1, a_2, a_3, можно проектировать управление количеством товара при достижении только состояний с координатами: $x_0 = cy_0^2$, $y_0 = \frac{a_1c+\sqrt{a_1^2c^2+4a_2}}{2a_3c}, c > 0,$ то есть лежащих на параболе $x = cy^2$.

2) Если же поставлена цель достигнуть произвольное (заданное) состояние (x_0, y_0), $x_0, y_0 > 0$, то в этом случае следует изменять параметры товара a_1, a_2, a_3, которые должны удовлетворять равенству: $a_1x_0 + a_2y_0 = a_3x_0y_0$. То есть, по известным a_1, a_2 из этого уравнения находим a_3, либо по заданному a_3 из этого уравнения подбираем положительные a_1, a_2.

Выводы

Проведенный численный эксперимент свидетельствует об устойчивости в целом состояния системы. Рассмотренная математическая модель динамической системы «Возникновение планового регулирования денежных и товарных потоков» дает возможность строить прогнозы динамики взаимосвязи денежных и товарных потоков при любых заданных начальных состояниях системы с целью достижения динамического равновесия.

Библиографический список

1. *Баутин, Н. Н., Леонтович, Е. А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. — М., 1990.

2. *Братищев, А. В., Батищева, Г. А., Журавлёва, М. И.* Бифуркационный анализ и синергетическое управление динамической системой «посредническая деятельность» // Интеллектуальные ресурсы — региональному развитию. — 2018. — Т. 4, № 1. — С. 2009–2013.

3. *Васильев, В. В., Симак, Л. А., Рыбникова, А. М.* Математическое и компьютерное моделирование процессов и систем в среде MATLAB/SIMULINK : учеб. пособие. — Киев, 2008.

4. Зубов, В. П. Устойчивость движения. Методы Ляпунова и их применение. — 2-е изд. — М., 1984.

5. *Журавлёва, М. И., Батищева, Г. А., Кузнецов, М. В., Трофименко Е. А.* Экономический поход. Анализ и управление динамической системой «Посредническая

деятельность» // Вестник РГЭУ (РИНХ). — 2018. — № 4 (64). — С. 105−111.

6. *Колесников, А. А.* Синергетические методы управления сложными системами. Теория системного анализа. — М., 2006.

7. *Малкин, И. Г.* Теория устойчивости движения. — М., 1966.

8. *Милованов, В. П.* Синергетика и самоорганизация: Социально-экономические системы. — М., 2010.

9. *Сагинтаева, С. С.* Сбалансированность товарных и финансовых потоков как фактор экономической устойчивости // Известия Уральского государственного экономического университета. — 2010. — № 1 (27). — С. 88−93.

Bibliographic list

1. *Bautin, N. N., Leontovich, E. A.* Methods and techniques of qualitative research of dynamical systems on a plane. — M., 1990.

2. *Bratishchev, A. V., Batishcheva, G. A., Zhuravleva, M. I.* Bifurcation analysis and synergetic management of dynamic system «intermediary activity» // Intellectual resources — regional development. — 2018. — Vol. 4, № 1. — P. 2009–2013.

3. *Vasiliev, V. V., Simak, L. A., Rybnikova, A. M.* Mathematical and computer modeling of processes and systems in MATLAB/ SIMULINK : textbook. — Kyiv, 2008.

4. *Zubov, V. P.* Stability of movement. Lyapunov's methods and their application. — 2nd ed. — M., 1984.

5. *Zhuravleva, M. I., Batishcheva, G. A., Kuznetsov, M. V., Trofimenko E. A.* Economic campaign. Analysis and management of dynamic system «Intermediary activity» // Vestnik of RSUE (RINH). — 2018. — № 4 (64). — P. 105–111.

6. *Kolesnikov, A. A.* Synergetic methods of managing complex systems. Theory of system analysis. — M., 2006.

7. *Malkin, I. G.* Theory of resistance movements. — M., 1966.

8. *Milovanov, V. P.* Synergetics and self-organization: Socio-economic systems. — M., 2010.

9. *Sagintayeva, S. S.* Balance of commodity and financial flows as factor of economic stability // Proceedings of Ural State University of Economics. — 2010. — № 1 (27). — P. 88–93.