

РАЗДЕЛ 3. ФИНАНСОВО-КРЕДИТНЫЕ ОТНОШЕНИЯ И БУХГАЛТЕРСКИЙ УЧЕТ

DOI 10.54220/v.rsue.1991-0533.2023.2.28.012

Г. А. Батищева, М. И. Журавлёва, П. В. Николенко

О ВЫВОДЕ ПАРЫ ОБЪЕКТОВ НА ЗАДАННЫЙ УРОВЕНЬ ФОНДОВОООРУЖЕННОСТИ ЗА ФИКСИРОВАННОЕ ВРЕМЯ ПРИ МИНИМАЛЬНЫХ ЗАТРАТАХ

Аннотация

В модели «инвестиции – потребление» рассматривается вопрос о достижении нужного уровня фондовооруженности к фиксированному моменту времени парой объектов. Рост фондовооруженности обеспечивают собственные инвестиции, если их недостаточно для достижения поставленной цели, то необходимо привлекать дополнительные средства. При этом результат зависит как от величины привлеченных средств, так и от формы финансового потока, в котором они поступят. Установлен минимальный объем средств, которые необходимо привлечь дополнительно к собственным инвестициям, и форма финансового потока, заданного в векторной форме, в котором они должны поступать, чтобы поставленная цель была достигнута.

Ключевые слова

Производственная функция, фондовооруженность, управление, принцип максимума Понтрягина.

G. A. Batishcheva, M. I. Zhuravliova, P. V. Nikolenko

ABOUT THE OUTPUT OF PAIR OF OBJECTS TO A GIVEN LEVEL OF STOCK CAPACITY FOR A FIXED TIME AT MINIMAL COST

Annotation

In the «investment – consumption» model, the issue of achieving the desired level of capital strength by a fixed point in time by a pair of objects is considered. The growth of the capital stock is provided by own investments, if they are not enough to achieve the goal, then it is necessary to attract additional funds. At the same time, the result depends both on the amount of funds raised and on the form of the financial flow in which they will arrive. The minimum amount of funds that need to be attracted in addition to their own investments and the form of the financial flow, given in vector form, in which they must flow in order for the goal to be achieved, have been established.

Keywords

Production function, capital ratio, management, Pontryagin maximum principle.

Введение

Динамика фондовооруженности [1, 2] в модели «инвестиции – потребление» подчинена закону

$$\dot{x} = sf(x) - \mu x = F(x),$$

где x – фондовооруженность;

f – производственная функция;
 μ – коэффициент амортизации производственных фондов;
 $s \in (0,1)$ – доля произведенной стоимости, которая возвращается в производство в виде инвестиций.

Имеются два объекта, каждый со своим законом динамики фондовооруженности $\dot{x}_i = F_i(x)$ и значением фондовооруженности на нулевой момент времени

$$x_i(0) = x_i^0, \quad i = 1, 2.$$

Предполагается участие объектов в одном проекте, для этого необходимо, чтобы к моменту T фондовооруженность достигла значений x_1^1, x_2^1 . Предположим, что собственных инвестиций не хватает для достижения требуемых значений. Поэтому выделяются дополнительные средства, которые поступают в виде финансового потока плотности не выше p , далее эти средства делятся между объектами. Таким образом, динамика фондовооруженности описывается формулами

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= F_i(x_i) + u_i(t), \\ u_1(t) + u_2(t) &\leq p. \end{aligned}$$

Поставим вопрос о минимальном значении дополнительных средств, которые должны быть выделены для достижения объектами нужной фондовооруженности, и о тех финансовых потоках, в виде которых эти средства следует поставить объектам.

Будем предполагать, что функции F_i монотонно возрастают на промежутках $[x_i^0, x_i^1]$, а также выполняются условия согласования. Выполнение этих условий означает, что:

1) собственных инвестиций недостаточно для достижения нужной фондовооруженности;

2) для достижения значений x_1^1, x_2^1 достаточно привлечь сумму меньшую pT . Кроме того, будем считать, что для функций, F_1, F_2 выполнены условия «общности положения» (см. ниже).

Отметим, что в работах [3-5] исследовались различные вопросы, связанные с поиском оптимального финансового потока.

Материалы и методы

Запишем задачу как задачу теории управления

$$\int_0^T (u_1(t) + u_2(t)) dt \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= F_i(x_i) + u_i(t) \\ x_i(0) &= x_i^0, x_i(T) = x_i^1 \\ u_i &\geq 0, u_1 + u_2 \leq p \\ i &= 1, 2 \end{aligned}$$

Здесь управления u_i являются кусочно-непрерывными, непрерывными справа, с разрывами первого рода функциями, момент T фиксирован.

Среди всех допустимых управлений $u = (u_1, u_2)$ следует указать то, которое придает минимальное значение целевому функционалу.

Результаты

Для исследования задачи воспользуемся принципом максимума Понтрягина [1, с. 208]. Составим функцию Понтрягина

$$H = \Psi_0(u_1 + u_2) + \sum_{i=1}^2 \Psi_i(F_i(x_i) + u_i)$$

и сопряженную систему

$$\dot{\Psi}_i = -\Psi_i F'_i(x_i) = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

согласно принципу максимума, если (x, u) оптимальный процесс, то найдется решение Ψ сопряженной системы такое, что в любой момент времени выполняется неравенство

$$H(\Psi, x, u) \geq H(\Psi, x, \vartheta), \quad (3)$$

где $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2)$ произвольный допустимый элемент, т. е.

$$\vartheta_1 \geq 0, \quad \vartheta_2 \geq 0, \quad \vartheta_1 + \vartheta_2 \leq p.$$

Константа Ψ_0 равна либо нулю, либо минус единице. В случае $\Psi_0 = 0$ не выполняется условие согласования, поэтому $\Psi_0 = -1$ и

$$H = \sum_{i=1}^2 (\Psi_i - 1)u_i + \sum_{i=1}^2 \Psi_i F_i.$$

В силу неравенства (3), если

$$\begin{cases} \Psi_1 < 1 \\ \Psi_2 < 1 \end{cases}, \quad \text{то} \quad \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \end{cases};$$

если

$$\begin{cases} \Psi_i > \Psi_j \\ \Psi_i > 1 \end{cases}, \quad \text{то} \quad \begin{cases} u_i = p \\ u_j = 0 \end{cases}. \quad (4)$$

Относительно функций F_1, F_2 будем предполагать, что для них выполнено условие «общности положения». Это означает, что для любого допустимого процесса (x, u) (выполнены условия (1)) и

любого решения Ψ сопряженной системы (2) равенство $\Psi_1 = \Psi_2$ не является верным для любого промежутка времени.

В условиях сделанных предположений управление u может принимать одно из следующих значений: $(0, 0)$, $(p, 0)$, $(0, p)$.

Лемма 1. Пусть (x, Ψ) – решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x) + u \\ \dot{\Psi} = -\Psi F'(x) \end{cases}$$

на отрезке $[t_0, t_1]$, u – константа.

Тогда

$$\Psi(t_1) = \frac{\Psi(t_0)(F(x(t_0)) + u)}{F(x(t_1)) + u}.$$

Доказательство. Система является гамильтоновой с функцией

$$H = \Psi(F(x) + u),$$

поэтому $H(t_0) = H(t_1)$, разрешая это уравнение относительно $\Psi(t_1)$, получаем утверждение леммы. Лемма позволяет получить следующую формулу. Пусть Ψ_1, Ψ_2, x, y решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = F_1(x) + u_1, \quad \dot{y} = F_2(y) + u_2 \\ \dot{\Psi}_1 = -\Psi_1 F_1'(x), \quad \dot{\Psi}_2 = -\Psi_2 F_2'(y) \end{cases}$$

(u_1, u_2) – константы) на отрезке $[t_1, t_2]$, причем $\Psi_1(t_i) = \Psi_2(t_i)$.

Обозначая $x(t_i) = x_i$, $y(t_i) = y_i$ и пользуясь леммой, запишем

$$\Psi_1(t_1) = \frac{\Psi_1(t_0)(F_1(x_0) + u_1)}{F_1(x_1) + u_1}$$

$$\Psi_2(t_1) = \frac{\Psi_2(t_0)(F_2(y_0) + u_2)}{F_2(y_1) + u_2}$$

так как $\Psi_1 = \Psi_2$ на концах отрезка, получаем

$$\frac{F_1(x_0) + u_1}{F_1(x_1) + u_1} = \frac{F_2(y_0) + u_2}{F_2(y_1) + u_2}. \quad (5)$$

Для удобства переобозначим x_1 через x , x_2 через y . В силу условий согласования и «общности положения» имеются k ($k \geq 2$) точек переключения $t_k < t_{k-1} < \dots < t_2 < t_1 < T$, им соответствуют значения $x_k < x_{k-1} < \dots < x_2 < x_1$, $y_k < y_{k-1} < \dots < y_2 < y_1$. Так как функции Ψ_1, Ψ_2 монотонно убывают и положительны, на промежутке $[t_1, T]$ $u_1 = u_2 = 0$; на промежутках $[0, t_k]$, $[t_k, t_{k-1}]$, ..., $[t_2, t_1]$ одна из компонент вектора u равна p , а другая нулю поочередно. Рассмотрим случай $k = 2$, тогда либо $u_1 = p$, $u_2 = 0$ на промежутке $[t_2, t_1]$, $u_1 = 0$, $u_2 = p$ на множестве $[0, t_2]$, либо $u_1 = 0$, $u_2 = p$ на $[t_2, t_1]$, $u_1 = p$, $u_2 = 0$ на $[0, t_2]$.

В случае $u_1 = p$ на $[t_2, t_1]$ следует выяснить значения x_2, x_1, y_2 . Тогда $u_1 = p$ пока x меняется от x_2 до x_1 и $u_1 = 0$ для других значений x , $u_2 = p$ пока y меняется от x_2^0 до y_2 и $u_2 = 0$ для других значений y .

Для вычисления указанных трех неизвестных имеем три уравнения:

$$\begin{cases} \int_{x_1^0}^{x_2} \frac{dx}{F_1(x)} + \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{F_1(x) + p} + \int_{x_1}^{x_1^1} \frac{dx}{F_1(x)} = T \\ \int_{x_2^0}^{y_2} \frac{dy}{F_2(y) + p} + \int_{y_2}^{x_2^1} \frac{dy}{F_2(y)} = T \\ \int_{x_1^0}^{x_2} \frac{dx}{F_1(x)} = \int_{x_2^0}^{y_2} \frac{dx}{F_2(y) + p} \end{cases} \quad (6)$$

Первые два уравнения выражают тот факт, что время изменения x по промежутку $[x_1^0, x_1^1]$, y по промежутку $[x_2^0, x_2^1]$ составляет T . Третье уравнение верно, так как время изменяется x по

промежутку $[x_1^0, x_2]$ равно времени изменения y по промежутку $[x_2^0, y_2]$

В случае $u_2 = p$ на $[t_2, t_1]$ следует вычислить значения y_2, y_1, x_2 с помощью системы, аналогичной (5)

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{x_2^0}^{y_2} \frac{dy}{F_2(y)} + \int_{y_2}^{y_1} \frac{dy}{F_2(y) + p} + \int_{y_1}^{x_2^1} \frac{dy}{F_2(y)} = T \\ \int_{x_1^0}^{x_2} \frac{dx}{F_1(x) + p} = \int_{x_2}^{x_1^1} \frac{dx}{F_1(x)} = T \\ \int_{x_1^0}^{x_2} \frac{dx}{F_1(x) + p} = \int_{x_2^0}^{y_2} \frac{dy}{F_2(y)} \end{array} \right. \quad (7)$$

Далее систему (6) обозначаем A_2 , систему (7) $\tilde{A}_2$. В случае если ни одна из систем $A_2, \tilde{A}_2$ не имеет решения, то $k \geq 3$. В случае $k > 2$ на каждом из промежутков

$[t_k, t_{k-1}]$, ..., $[t_3, t_2]$ выполняются условия

$\Psi_1(t_i) = \Psi_2(t_i)$, $i = 2, \dots, k$, и, следовательно, выполнена формула (5). Введем обозначения

$$\alpha_i = \begin{cases} p, & \text{при } i = 2l + 1 \\ 0, & \text{при } i = 2l \end{cases}, \quad \beta_i = \begin{cases} p, & \text{при } i = 2l \\ 0, & \text{при } i = 2l + 1 \end{cases}$$

где l – натуральное число. Если $u_1 = p$ на $[t_2, t_1]$, то $u_1 = \alpha_i$, $u_2 = \beta_i$ на

$[t_{i+1}, t_i]$ и, следовательно, верен следующий набор соотношений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{F_1(x) + \alpha_i} = \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{dy}{F_1(y) + \beta_i} \\ \frac{F_1(x_{i+1}) + \alpha_i}{F_1(x_i) + \alpha_i} = \frac{F_2(y_{i+1}) + \beta_i}{F_2(y_i) + \beta_i} \end{array} \right. \quad (8)$$

где $i = 2, \dots, k-1$. Всего $2(k-2)$ уравнений. Кроме того, время изменения от x_1^0 до x_k и от x_2^0 до y_k одинаково,

а также от x_2 до x_1^1 и от y_2 до x_2^1 одинаково. Это дает два уравнения

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{x_1^0}^{x_k} \frac{dx}{F_1(x) + \alpha_k} = \int_{x_2^0}^{y_k} \frac{dy}{F_2(y) + \beta_k} \\ \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{F_1(x) + p} + \int_{x_1}^{x_1^1} \frac{dx}{F_1(x)} = \int_{y_2}^{x_2^1} \frac{dy}{F_1(y)} \end{array} \right. \quad (9)$$

Весь процесс протекает за время T , что дает еще одно уравнение

$$\int_{x_1^0}^{x_k} \frac{dx}{F_1(x) + \alpha_k} + \sum_{i=1}^{k-1} \int_{x_{i+1}}^{x_i} \frac{dx}{F_1(x) + \alpha_i} + \int_{x_1}^{x_1^1} \frac{dx}{F_1(x)} = T. \quad (10)$$

Совокупность (8), (9), (10) имеет $2k-1$ уравнений, при этом неизвестными являются $x_k, \dots, x_1, y_k, \dots, y_2$. Эту систему обозначаем A_k .

В случае $u_2 = p$ на $[t_2, t_1]$, неизвестными являются $x_k, \dots, x_2, y_k, \dots, y_1$,

которые составляют решение системы $\tilde{A}_k$ (в случае если это решение есть). Система $\tilde{A}_k$ строится аналогично A_k .

Запишем ее: $u_1 = \beta_i$, $u_2 = \alpha_i$ на $[t_{i+1}, t_i]$

$$\begin{cases} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{F_1(x) + \beta_i} = \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{dx}{F_2(y) + \alpha_i} \\ \frac{F_1(x_{i+1}) + \beta_i}{F_1(x_i) + \beta_i} = \frac{F_2(y_{i+1}) + \alpha_i}{F_2(y_i) + \alpha_i} \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \int_{x_1^0}^{x_k} \frac{dx}{F_1(x) + \beta_k} = \int_{x_2^0}^{y_k} \frac{dy}{F_2(y) + \alpha_k} \\ \int_{x_2}^{x_1^1} \frac{dx}{F_1(x)} = \int_{y_2}^{y_1} \frac{dy}{F_2(y) + p} + \int_{y_1}^{x_2^1} \frac{dy}{F_2(y)} \end{cases} \quad (12)$$

$$\int_{x_2^0}^{y_k} \frac{dy}{F_2(y) + \alpha_k} + \sum_{i=1}^{k-1} \int_{y_{i+1}}^{y_i} \frac{dy}{F_2(y) + \alpha_i} + \int_{y_1}^{x_2^1} \frac{dy}{F_2(y)} = T \quad (13)$$

Совокупность уравнений (11)-(13) составляет систему $\tilde{A}_k$.

Обсуждение

Пусть выбрано наименьшее значение k при котором A_k , либо $\tilde{A}_k$ разрешима.

Управление u при этом будет записано как функция аргумента x , если разрешима A_k , либо как функция y , если разрешима $\tilde{A}_k$. Так, если разрешима A_k , то

$$u_1 = \begin{cases} 0, & \text{при } x \in [x_1, x_1^1] \\ \alpha_i, & \text{при } x \in [x_{i+1}, x_i] \\ \alpha_k, & \text{при } x \in [x_1^0, x_k] \end{cases} \quad (14)$$

$$u_2 = \begin{cases} 0, & \text{при } x \in [x_2, x_1^1] \\ \beta_i, & \text{при } x \in [x_{i+1}, x_i] \\ \beta_k, & \text{при } x \in [x_1^0, x_k] \end{cases}$$

Аналогично записывается управление u , если разрешима $\tilde{A}_k$.

Выводы

Выделяемые средства потребляются в максимальном темпе p поочередно объектами в соответствии с формулами (14), если разрешима A_k , либо в соответствии с их аналогом, если разрешима $\tilde{A}_k$. При этом минимальный необходимый объем средств есть

$$p(T - \int_{x_1}^{x_1^1} \frac{dx}{F_1(x)}),$$

если разрешима A_k , либо

$$p(T - \int_{y_1}^{x_2^1} \frac{dy}{F_2(y)}),$$

если разрешима $\tilde{A}_k$.

Библиографический список

1. Ашманов, С. А. Введение в математическую экономику. – М., 1984. – 293 с.
2. Николенко, П. В. Непрерывные математические модели : учеб. пособие. – Ростов-на-Дону, 2014. – 64 с.
3. Николенко, П. В. Оптимальная форма заемных средств в задаче о наискорейшем выходе на заданный уровень фондовооруженности // Вестник РГЭУ (РИНХ), 2020. – № 1 (69). – С. 157-163.
4. Николенко, П. В., Новикова, Л. В. Об одной экстремальной задаче в модели «инвестиции-потребление» // Владикавказский математический журнал. – 2021. – № 2. – С. 87-92.
5. Об одновременном выходе на заданный уровень фондовооруженности группы объектов в кратчайшее время /