DOI 10.54220/v.rsue.1991-0533.2022.78.2.022

А. В. Братищев, Г. А. Батищева, М. И. Журавлёва

БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛИ «ПРОЦЕССЫ НАКОПЛЕНИЯ КАПИТАЛА И РОСТА ПРОИЗВОДСТВА»

Аннотация

В статье предложена математическая модель динамической системы «Процессы накопления капитала и роста производства», проведен полный бифуркационный анализ, описаны все возможные схемы разбиения фазового пространства динамической системы в зависимости от точки из пространства параметров. Сделан вывод о целесообразности рассмотрения дополнительных факторов, влияющих на взаимодействие изучаемых процессоров.

Ключевые слова

Накопление капитала, рост производства, динамическая система, фазовый портрет, пространство параметров, бифуркационный анализ.

A. V. Bratishchev, G. A. Batishcheva, M. I. Zhuravliova

BIFURCATION ANALYSIS OF MODEL «PROCESSES OF CAPITAL ACCUMULATION AND PRODUCTION GROWTH»

Annotation

Article proposes a mathematical model of dynamic system «Processes of capital accumulation and production growth», complete bifurcation analysis was carried out, all possible schemes of partitioning the phase space of dynamical system depending on a point from parameter space are described. Conclusion is made about expediency of considering additional factors affecting the interaction of studied processors.

Keywords

Accumulation of capital, production growth, dynamic system, phase portrait, parameter space, bifurcation analysis.

Введение

В современных условиях развития национальной и региональной экономики, характеризующихся блокированием экономической активности России со стороны стран Запада, особое значение приобретает обеспечение устойчивого экономического роста.

Важнейшим показателем уровня развития экономики любой страны является величина валового внутреннего продукта, увеличение объемов которого способствует росту богатства страны, повышению уровня и качества жизни населения. Экономический рост зависит от множества факторов, но наиболее достоверно и устойчиво связанным с экономическим ростом фактором является накопление капитала. Исследование взаимосвязи процессов накопления капитала и роста производства математическими методами поможет выявить направления роста данных показателей и, как следствие, роста экономики.

Материалы и методы

Методы исследования данной статьи ранее были использованы авторами для анализа других взаимосвязанных экономических процессов в работах [1–5].

В качестве математической модели взаимосвязанных процессов накопления капитала и роста производства в статье

рассматривается автономная система дифференциальных уравнений.

Выделим три аддитивных фактора, влияющих на скорость изменения капитала $x(t)$:

1) деньги непосредственно «делают» деньги, например, вложение денег в банк под проценты или ростовщичество. Это положительный фактор, и его величину определим как $a_1 x$;

2) доходы, получаемые предпринимателем от его предпринимательской активности. Наиболее существенный положительный фактор, и поэтому определим его величину как $a_2 y^2$;

3) капиталовложения в производство, которые тормозят рост капитала и пропорциональны его размерам. Определим их величиной $a_3 xy$.

Уравнение баланса доходов и расходов предпринимателя тогда примет вид: $\frac{dx}{dt} = a_1 x + a_2 y^2 - a_3 xy$.

На скорость производства положительно влияет вложение капитала. Будем считать это вложение пропорциональным росту производства, и определим его величиной $b_1 xy$. Наконец, рост производства $y(t)$ всегда сопровождается ростом непроизводственных расходов. Это влияние выразим слагаемым $b_2 x$. Тогда второе уравнение баланса примет вид: $\frac{dy}{dt} = b_1 xy - b_2 x$.

В целом получаем такую математическую модель, связывающую процессы накопления и производства:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1 x + a_2 y^2 - a_3 xy \\ \frac{dy}{dt} = b_1 xy - b_2 x \end{cases}. \qquad (1)$$

Подобная модель предложена в монографии [6], где в качестве $y(t)$ бралось количество способов, которыми можно составить капитал. Качественное исследование в монографии не проводилось.

Цель данной статьи — бифуркационный анализ системы (1) и соответствующие экономические выводы. Систематически используются методы качественного исследования автономных систем второго порядка [7].

Коэффициенты a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 считаются положительными параметрами.

Положения равновесия системы (1) находятся как решения системы уравнений:

$$\begin{cases} a_1 x + a_2 y^2 - a_3 xy = 0 \\ b_1 xy - b_2 x = 0 \end{cases}.$$

Они равны:

$$s_1 = (0,0);$$

$$s_2 = \left(\frac{a_2 b_2^2}{b_1 (a_3 b_2 - a_1 b_1)}, \frac{b_2}{b_1} \right).$$

Вычислим матрицу Якоби правых частей системы (1):

$$\begin{pmatrix} a_1 - a_3 y & 2a_2 y - a_3 x \\ b_1 y - b_2 & b_1 x \end{pmatrix}.$$

Выясним характер устойчивости первого положения равновесия. Характеристический многочлен матрицы Якоби в этой точке равен $\lambda^2 - a_1 \lambda$. Так как определитель матрицы Якоби $\Delta = 0$, то $s_1 = (0,0)$ всегда является кратным положением равновесия.

В этом случае существует неособое линейное преобразование, с помощью которого система в окрестности положения равновесия $s_1 = (0,0)$ может быть представлена в каноническом виде. Это необходимо для исследования характера устойчивости кратного положения равновесия.

Результаты

Сделаем замену переменных в системе (1):

$$\begin{cases} x = a_1 y_1 \\ y = x_2 - b_2 y_1 \end{cases}.$$

В результате приходим к каноническому виду:

$$\begin{cases} x_1' = \frac{a_2 b_2}{a_1} x_1^2 + (a_1 b_1 - \frac{2a_2 b_2^2}{a_1} - a_3 b_2) x_1 y_1 + (a_3 b_2^2 - a_1 b_1 b_2 + \frac{a_2 b_2^3}{a_1}) y_1^2 \\ y_1' = a_1 y_1 + \frac{a_2}{a_1} x_1^2 - (2\frac{a_2 b_2}{a_1} + a_3) x_1 y_1 + (a_3 b_2 + \frac{a_2 b_2^2}{a_1}) y_1^2 \end{cases} \quad (2)$$

Приравняем правую часть второго уравнения системы (2) к нулю:

$$(a_3 b_2 + \frac{a_2 b_2^2}{a_1}) y_1^2 - (2\frac{a_2 b_2}{a_1} x_1 + a_3 x_1 - a_1) y_1 + \frac{a_2}{a_1} x_1^2 = 0$$

и разрешим полученное уравнение относительно y_1 в окрестности точки (0,0):

$$y_1(x_1) = -\frac{2a_2}{a_1^2} x_1^2 + \ldots \quad (3)$$

Подставляем эту функцию в правую часть первого уравнения системы (2):

$$f_1 = \frac{a_2 b_2}{a_1} x_1^2 + (a_1 b_1 - \frac{2a_2 b_2^2}{a_1} - a_3 b_2) x_1 y_1 + (a_3 b_2^2 - a_1 b_1 b_2 + \frac{a_2 b_2^3}{a_1}) y_1^2 = \frac{a_2 b_2}{a_1} x_1^2 + \ldots = \Delta_2 x_1^2 + \ldots$$

Первый, не равный нулю, коэффициент равен $\Delta_2 = \frac{a_2 b_2}{a_1}$. По теореме об анализе характера кратного положения равновесия [7] положение равновесия $s_1 = (0,0)$ является неустойчивым седло-узлом.

Исследуем характер положения равновесия $s_2 = \left(\frac{a_2 b_2^2}{b_1(a_3 b_2 - a_1 b_1)}, \frac{b_2}{b_1}\right)$ системы (1) в предположении, что $a_3 b_2 - a_1 b_1 \neq 0$. Собственные числа матрицы Якоби правой части системы (1) в этой точке равны

$$\lambda_1 = \frac{a_1 b_1 - a_3 b_2}{b_1}, \quad \lambda_2 = \frac{a_2 b_2^2}{a_3 b_2 - a_1 b_1},$$

и по теореме Ляпунова [7] это положение равновесия грубое и имеет характер седла.

Рассмотрим теперь случай $a_3 b_2 - a_1 b_1 = 0$. Он задает в пространстве параметров системы (1) поверхность точек бифуркации

$$L := \{(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2) : a_3 b_2 = a_1 b_1\}.$$

Эта гиперповерхность делит пятимерное пространство параметров на две области грубых динамических систем:

$$G^+ := \{(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2) : a_3 b_2 > a_1 b_1\},$$

$$G^- := \{(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2) : a_3 b_2 < a_1 b_1\}.$$

В точках поверхности L система (1) имеет только одно конечное положение равновесия. Действительно, в этом случае можно исключить один из параметров по формуле: $a_3 = \frac{a_1 b_1}{b_2}$. Получим такую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1 x + a_2 y^2 - \frac{a_1 b_1}{b_2} xy \\ \frac{dy}{dt} = b_1 xy - b_2 x \end{cases} \quad (4)$$

Приравнивая правые части полученной системы к нулю и решая алгебраическую систему уравнений, получаем единственное положение равновесия: $s_1 = (0,0)$.

Обсуждение

Вывод 1. В результате проведенного анализа были установлены следующие положения равновесия системы (1):

$s_1 = (0,0)$ — седло-узел;

$s_2 = \left(\frac{a_2 b_2^2}{b_1(a_3 b_2 - a_1 b_1)}, \frac{b_2}{b_1}\right)$ — седло.

Вывод 2. Для системы (1) в случае, когда параметры $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2) \in L$ (бифуркационная поверхность), конечное положение равновесия оказалось единственным. Это $s_1 = (0,0)$ — седло-узел.

Будем создавать характерные фазовые портреты, используя выводы 1 и 2 этого пункта и пакет MATLAB+ SIMULINK [8, 9].

На рисунке 1 показан фазовый портрет системы (1) для точки $(2; 4; 4; 3; 3) \in G^+$ в окрестности положений равновесия $s_1 = (0,0)$ и $s_2 = (2,1)$.

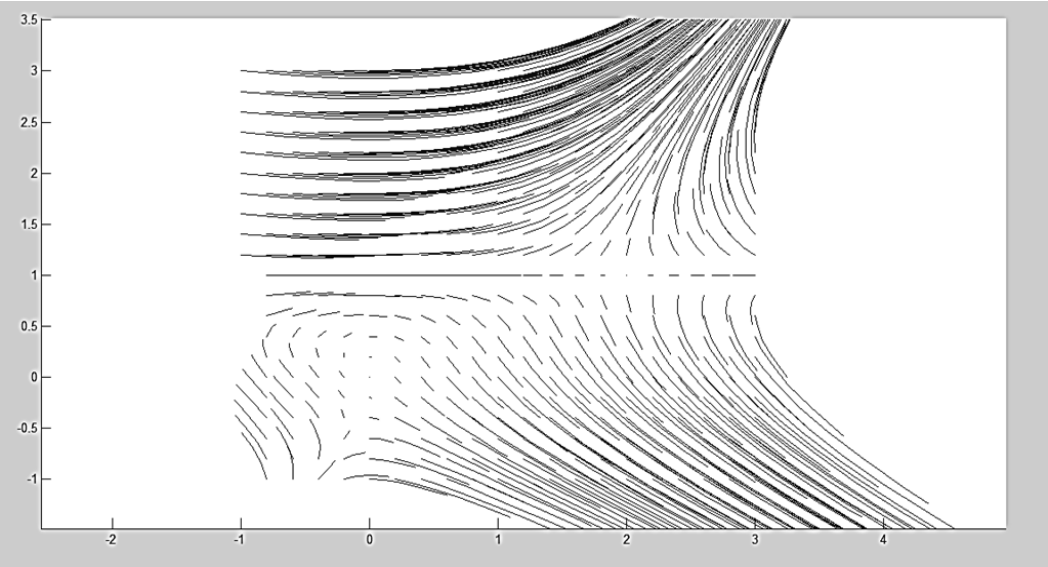

Рисунок 1 — **Фазовый портрет системы (1) в окрестности положений равновесия**

Полный бифуркационный анализ предполагает анализ асимптотического поведения траекторий и создание всех логически возможных схем фазовых портретов системы (1). В случае когда правые части автономной системы являются многочленами, разработан аппарат преобразований Пуанкаре [7], которым мы и воспользуемся.

Исследование асимптотического поведения траекторий в окрестности точек $(\pm\infty, 0)$ проводится с помощью замены переменных в системе (1) по формулам $x = \frac{1}{u}$, $y = \frac{v}{u}$. В результате получаем систему (5):

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -a_1u^2 - a_2v^2u + a_3vu \\ \frac{dv}{dt} = b_1v - b_2u - a_1vu - a_2v^3 + a_3v^2 \end{cases} \quad (5)$$

Последняя имеет следующие положения равновесия (являющиеся особыми точками предыдущего уравнения):

$$s_1^0 = (0,0),\ s_{2,3}^0 = \left(0, \frac{a_3 \pm \sqrt{a_3^2 + 4a_2b_1}}{2a_2}\right).$$

Математический анализ [7] показывает, что положение равновесия $s_1^0 = (0,0)$ является неустойчивым седло-узлом в случае $a_3b_2 - a_1b_1 \neq 0$ и сложным седлом в случае $a_3b_2 - a_1b_1 = 0$. В первом случае траектории исходной системы выходят из точки $(+\infty, 0)$. Во втором случае они проходят мимо этой точки.

Собственные числа матрицы Якоби в положении $s_{2,3}^0 = (0, \frac{a_3 \pm \sqrt{a_3^2 + 4a_2b_1}}{2a_2})$ отрицательны при любых значениях параметров. Поэтому они являются устойчивыми узлами системы (5). Применим обратное преобразование Пуанкаре в окрестности этой точки. В результате получаем, что лучи, выходящие из начала координат в направлениях $arctg\left(\frac{a_3 \pm \sqrt{a_3^2 + 4a_2b_1}}{2a_2}\right)$, определяют асимптотические направления в первой и четвертой четвертях, по которым траектории системы (1) уходят на бесконечность. Исследование асимптотического поведения траекторий в окрестности точек $(0, \pm\infty)$ проводится с помощью замены переменных в системе (1) по формулам: $x = \frac{v}{u}$, $y = \frac{1}{u}$. В результате получаем систему

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = b_2u^2v - b_1uv \\ \frac{dv}{dt} = a_1vu + a_2 - \frac{a_1b_1}{b_2}v + b_2uv^2 - b_1v^2 \end{cases}.$$

Из нее видно, что (0,0) не является поло-

жением равновесия. А значит точка $(0, \pm\infty)$ не является положением равновесия системы (1).

Вывод 3. В результате проведенного полного бифуркационного анализа динамической системы «Процессы накопления капитала и роста производства» можно построить фазовые портреты, описывающие поведение траекторий на всей плоскости.

На рисунке 2 показан типичный фазовый портрет для параметров из G^+, на рисунке 3 — для пространства параметров G^-. Сепаратрисы разбивают каркас фазового пространства на пять ячеек. На рисунке 4 — для случая бифуркационной поверхности с параметрами L — сепаратрисы разбивают каркас фазового пространства на три ячейки.

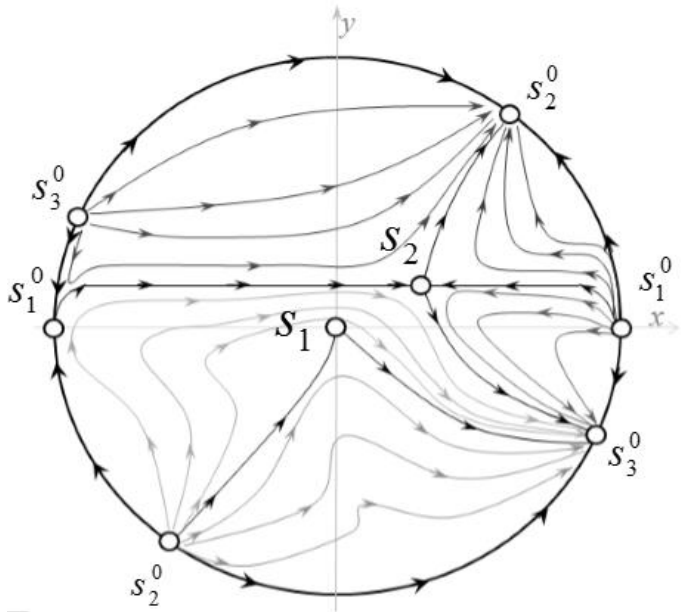

Рисунок 2 — **Схема разбиения на траектории ДС для параметров из области G^+**

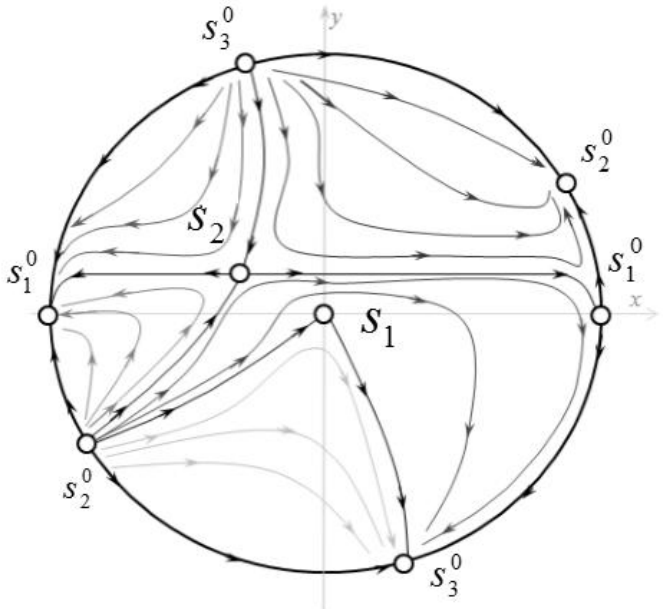

Рисунок 3 — **Схема разбиения на траектории ДС для параметров из области G^-**

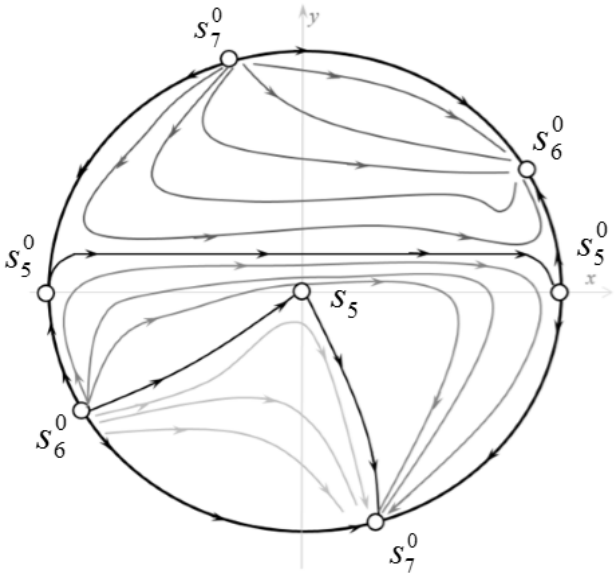

Рисунок 4 — **Схема разбиения на траектории ДС для точек бифуркации из *L***

Выводы

Экономический смысл имеют траектории, расположенные в первой четверти. Траектория $y = \frac{b_2}{b_1}$ системы (1) разделяет фазовое пространство на верхнюю половину, траектории которой имеют экономический смысл, и на нижнюю половину, траектории которой экономического смысла не имеют. Для любой траекторий из верхней половины имеет место асимптотическое равенство

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{y(t)}{x(t)} = arctg\left(\frac{a_3+\sqrt{a_3^2+4a_2b_1}}{2a_2}\right),$$

то есть размер капитала и производство пропорционально и неограниченно растут с течением времени. Рассмотренная модель нуждается либо в учете других факторов, либо в проектировании управляющих воздействий на систему.

Библиографический список

1. *Братищев, А. В., Батищева, Г. А., Журавлёва, М. И.* Бифуркационный анализ и синергетическое управление динамической системой «посредническая деятельность» // Интеллектуальные ресурсы — региональному развитию. — 2018. — Т. 4 (1). — С. 2009–2013.

2. *Bratishchev, A. V., Batishcheva, G. A., Zhuravliova, M. I.* Bifurcation analysis and synergetic management of dynamic system «Intermediary activity» // Advances in Intelligent Systems and Computing book series. — 2019. — Vol. 896. — P. 659–667.

3. *Bratishchev, A. V., Batishcheva, G. A., Denisov, M. Y., Zhuravliova, M. I.* Bifurcation analysis and synergetic control of dynamic system with several parameters // Advances in Intelligent Systems and Computing. — 2020. — Vol. 1095. — P. 639–646.

4. *Bratishchev, A. V., Batishcheva, G. A., Zhuravliova, M. I., Guzenko, N. V.* Mathematical model of demand and supply management // Advances in Intelligent Systems and Computing — ICAFS. — 2021. — Vol. 1306. — P. 678–684.

5. *Batishcheva, G. A., Zhuravliova, M. I., Rogozhin, S. V.* Mathematical model of production and exchange: bifurcation analysis and management // Advances in Intelligent Systems and Computing. — 2021. — Vol. 362. — P. 488–495.

6. *Милованов, В. П.* Неравновесные социально-экономические системы: синергетика и самоорганизация. — М., 2001.

7. *Баутин, Н. Н., Леонтович, Е. А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. — М., 1990.

8. *Дэбни, Дж., Харман, Т.* Simulink-4. Секреты мастерства // БИНОМ. Лаборатория знаний. — М., 2003.

9. *Братищев, А. В.* Руководство к работе с пакетами MATLAB и SIMULINK. Элементы проектирования и анализа : учеб. пособие. — Ростов-на-Дону, 2012.

Bibliographic list

1. *Bratishchev, A. V., Batishcheva, G. A., Zhuravliova, M. I.* Bifurcation analysis and synergetic management of dynamic system «intermediary activity» // Intellectual resources — regional development. — 2018. — Vol. 4 (1). — P. 2009–2013.

2. *Bratishchev, A. V., Batishcheva, G. A., Zhuravliova, M. I.* Bifurcation analysis and synergetic management of dynamic system «Intermediary activity» // Advances in Intelligent Systems and Computing book series. — 2019. — Vol. 896. — P. 659–667.

3. *Bratishchev, A. V., Batishcheva, G. A., Denisov, M. Y., Zhuravliova, M. I.* Bifurcation analysis and synergetic control of dynamic system with several parameters // Advances in Intelligent Systems and Computing. — 2020. — Vol. 1095. — P. 639–646.

4. *Bratishchev, A.V., Batishcheva, G. A., Zhuravliova, M. I., Guzenko, N. V.* Mathematical model of demand and supply management // Advances in Intelligent Systems and Computing — ICAFS. — 2021. — Vol. 1306. — P. 678–684.

5. *Batishcheva, G. A., Zhuravliova, M. I., Rogozhin, S. V.* Mathematical model of production and exchange: bifurcation analysis and management // Advances in Intelligent Systems and Computing. — 2021. — Vol. 362. — P. 488–495.

6. *Milovanov, V. P.* Non-equilibrium socio-economic systems: synergetics and self-organization. — M., 2001.

7. *Bautin, N. N., Leontovich, E. A.* Methods and techniques of qualitative research of dynamical systems on a plane. — M., 1990.

8. *Dabney, J., Harman, T.* Simulink-4. Secrets of mastery // BINOM. Laboratory of knowledge. — M., 2003.

9. *Bratishchev, A. V.* Guide to working with MATLAB and SIMULINK packages. Elements of design and analysis : textbook. — Rostov-on-Don, 2012.

DOI 10.54220/v.rsue.1991-0533.2022.78.2.023

В. А. Брыкалов

ФОРМИРОВАНИЕ ПРЕДПОСЫЛОК ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ СИСТЕМЫ УЧЕТНО-АНАЛИТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ В СФЕРЕ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СВЯЗИ

Аннотация

Особенности деятельности организаций в сфере телекоммуникационной связи влекут за собой необходимость создания соответствующей учетно-аналитической системы управления. В статье проведен исторический и теоретический экскурс трактовок ключевых понятий, таких как бизнес-процесс, телекоммуникационная сфера, информация. Анализ существующих понятий и соотнесение их с требованиями текущего времени выявили возможности организации учетного процесса. Выявление характеристик материальной и нематериальной составляющих инфотелекоммуникационного процесса позволили определить их принадлежность к соответствующим активам и пассивам. Определена необходимость создания системы оценки и учета информации организаций телекоммуникационной сферы.

Ключевые слова

Телекоммуникационная связь, бизнес-процесс, информация, активы, капитал, учетная система.