

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕЖСЕКТОРНОЙ КОНКУРЕНЦИИ

Аннотация

Нелинейная динамическая модель «хищник-хищник» относится к моделям жесткой конкуренции с правом, что каждый сектор имеет возможность расширяться. Качественное решение этой задачи базируется на проведенном для нее бифуркационном параметрическом анализе. Математический аппарат теории динамических систем применен к системе «хищник-хищник» в окрестностях особых точек и в этих окрестностях построены фазовые портреты поведения конкурентов с использованием пакета MatLab+Simulink.

Ключевые слова

Динамическая система, бифуркационный анализ, особая точка, узел, седло, фокус, траектория, фазовый портрет, сепаратриса.

G. A. Batishcheva, M. I. Zhuravliova, G. V. Lukyanova

NONLINEAR DYNAMIC MODEL OF INTERSECTORAL COMPETITION

Annotation

Non-linear dynamic predator-predator model refers to models of fierce competition with right that each sector has opportunity to expand. Qualitative solution of problem is based on bifurcation parametric analysis performed for it. Mathematical apparatus of theory of dynamical systems is applied to «predator-predator» system in vicinity of singular points, and phase portraits of behavior of competitors are constructed in these surroundings using MatLab+Simulink package.

Keywords

Dynamic system, bifurcation analysis, singular point, node, saddle, focus, trajectory, phase portrait, separatrix.

Введение

Методы качественной теории дифференциальных уравнений при решении задачи «хищник-хищник» позволяют конкретно описать взаимосвязь процессов жесткой конкуренции с анализом устойчивости динамического процесса. С помощью бифуркационного параметрического анализа можно найти

не только положения равновесия, но и описать характер поведения фазовых траекторий рассматриваемой системы в окрестностях этих особых точек с течением времени. Особые точки или положения равновесия системы «хищник-хищник» могут быть узлом (устойчивым или неустойчивым), фокусом (устойчивым или неустойчивым), а

также центром. Заметим, что особая точка — седло — обладает рядом отличительных качеств в сравнении с другими особыми точками, а именно: 1) в окрестности седла находится конечное число фазовых траекторий, которые называются сепаратриссами; 2) сепаратриссы связывают седло с узлами и фокусами. Таким образом, совокупность сепаратрисс образует некий каркас фазового портрета конкурентной модели, в котором фазовое пространство делится на так называемые ячейки. Внутри ячеек траектории ведут себя одинаково, т. е. или стягиваются к одному и тому же множеству на границе ячейки, или являются циклами. На бифуркационной границе происходит качественная перестройка фазового портрета. Некоторые модели двумерного экономического процесса рассмотрены в работах [1–5].

Материалы и методы

В современных условиях идет мощная конкуренция за общий ресурс. Рассмотрим одну из моделей конкуренции, которую назовем «хищник-хищник», и запишем ее в виде:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = b_1 x - c_1 xy - a_1 x^2 \\ \frac{dy}{dt} = b_2 y - c_2 xy - a_2 y^2 \end{cases},$$

где x — численность занятых в одном секторе экономики;

y — численность занятых в другом секторе экономики;

t — время;

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - c_1 y^* - 2a_1 x^* & -c_1 x^* \\ -c_2 y^* & b_2 - c_2 x^* - 2a_2 y^* \end{pmatrix},$$

для которой:

$$\begin{aligned} \sigma &= b_1 - c_1 y^* - 2a_1 x^* + b_2 - c_2 x^* - 2a_2 y^*, \\ \Delta &= (b_1 - c_1 y^* - 2a_1 x^*)(b_2 - c_2 x^* - 2a_2 y^*) - c_1 c_2 x^* y^*. \end{aligned}$$

Тогда для первого положения равновесия имеем:

$$\begin{aligned} \sigma(x_1^*, y_1^*) &= b_1 + b_2, \\ \Delta(x_1^*, y_1^*) &= b_1 b_2. \end{aligned}$$

Значит, $\lambda_1 = b_2 > 0$, $\lambda_2 = b_1 > 0$, из чего следует, что (x_1^*, y_1^*) — неустойчивый узел.

« $-b_1$ » и « b_2 » — темпы автономного «роста» первого и второго секторов соответственно;

c_1 и c_2 — характеризуют взаимодействие секторов друг с другом.

Слагаемые « $-a_1 x^2$ », « $-a_2 y^2$ » указывают на то, что число занятых в различных секторах не может неограниченно расти. Такая модель описывает взаимное конкурентное подавление, т. е. возникает конкуренция за общий ресурс. При этом считаем, что каждый сектор имеет возможность расширяться.

Из системы уравнений

$$\begin{cases} x(b_1 - c_1 y - a_1 x) = 0 \\ y(b_2 - c_2 x - a_2 y) = 0 \end{cases}$$

найдем положения равновесия:

$$\begin{cases} x_1^* = 0 \\ y_1^* = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_2^* = 0 \\ y_2^* = \frac{b_2}{a_2} \end{cases}, \quad (2)$$

$$\begin{cases} x_3^* = \frac{b_1}{a_1} \\ y_3^* = 0 \end{cases}, \quad (3)$$

$$\begin{cases} x_4^* = \frac{a_2 b_1 - b_2 c_1}{a_2 a_1 - c_1 c_2} \\ y_4^* = \frac{a_1 b_2 - b_1 c_2}{a_2 a_1 - c_1 c_2} \end{cases}. \quad (4)$$

Матрица коэффициентов линеаризованной в окрестности положения равновесия системы имеет вид:

Для второго положения равновесия имеем:

$$\sigma(x_2^*, y_2^*) = b_1 - \frac{c_1 b_2}{a_2} - b_2,$$

$$\Delta(x_2^*, y_2^*) = -b_2(b_1 - c_1 \frac{b_2}{a_2}).$$

В результате получим: $\lambda_1 = -b_2 < 0$,
 $\lambda_2 = b_1 - \frac{c_1 b_2}{a_2}$. В зависимости от параметров модели положение равновесия (x_2^*, y_2^*) может быть седлом (при $b_1 a_2 > c_1 b_2$), или устойчивым узлом (при $b_1 a_2 < c_1 b_2$). При $b_1 a_2 = c_1 b_2$ система попадает на бифуркационную границу.

Для третьего положения равновесия имеем:

$$\sigma(x_3^*, y_3^*) = -b_1 + b_2 - \frac{c_2 b_1}{a_1},$$

$$\Delta(x_3^*, y_3^*) = -b_1 (b_2 - c_2 \frac{b_1}{a_1}).$$

$$\text{В результате найдем: } \lambda_{1,2} = \frac{-b_1 a_1 a_2 + c_1 a_1 b_2 - b_2 a_1 a_2 + c_2 a_2 b_1}{2(a_1 a_2 - c_1 c_2)} \pm$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{-b_1 a_1 a_2 + c_1 a_1 b_2 - b_2 a_1 a_2 + c_2 a_2 b_1}{2(a_1 a_2 - c_1 c_2)} \right)^2 - \frac{(c_1 b_2 - b_1 a_2)(b_1 c_2 - a_1 b_2)}{a_1 a_2 - c_1 c_2}}.$$

Четвертое положение равновесия не будем классифицировать в общем виде. Это можно сделать численно для конкретных значений параметров модели.

Результаты

В модели жесткой конкуренции с ограниченным ростом:

В результате получим: $\lambda_1 = -b_1 < 0$,
 $\lambda_2 = b_2 - \frac{c_2 b_1}{a_1}$. В зависимости от параметров модели положение равновесия (x_3^*, y_3^*) может быть седлом (при $b_2 a_1 > c_2 b_1$) или устойчивым узлом (при $b_2 a_1 < c_2 b_1$). При $b_2 a_1 = c_2 b_1$ система снова попадает на бифуркационную границу.

Рассмотрим четвертое положение равновесия:

$$\sigma(x_4^*, y_4^*) = \frac{-b_1 a_1 a_2 + c_1 a_1 b_2 - b_2 a_1 a_2 + c_2 a_2 b_1}{a_1 a_2 - c_1 c_2},$$

$$\Delta(x_4^*, y_4^*) = \frac{(c_1 b_2 - b_1 a_2)(b_1 c_2 - a_1 b_2)}{a_1 a_2 - c_1 c_2},$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = b_1 x - c_1 xy - a_1 x^2 \\ \frac{dy}{dt} = b_2 y - c_2 xy - a_2 y^2 \end{cases}$$

Выберем $b_1 = 5$, $c_1 = 1$, $a_1 = 0,02$, $b_2 = 1$, $c_2 = 10$, $a_2 = 0,1$.

На рисунке 1 представлена модель с выбранными параметрами, построенная в приложении Simulink.

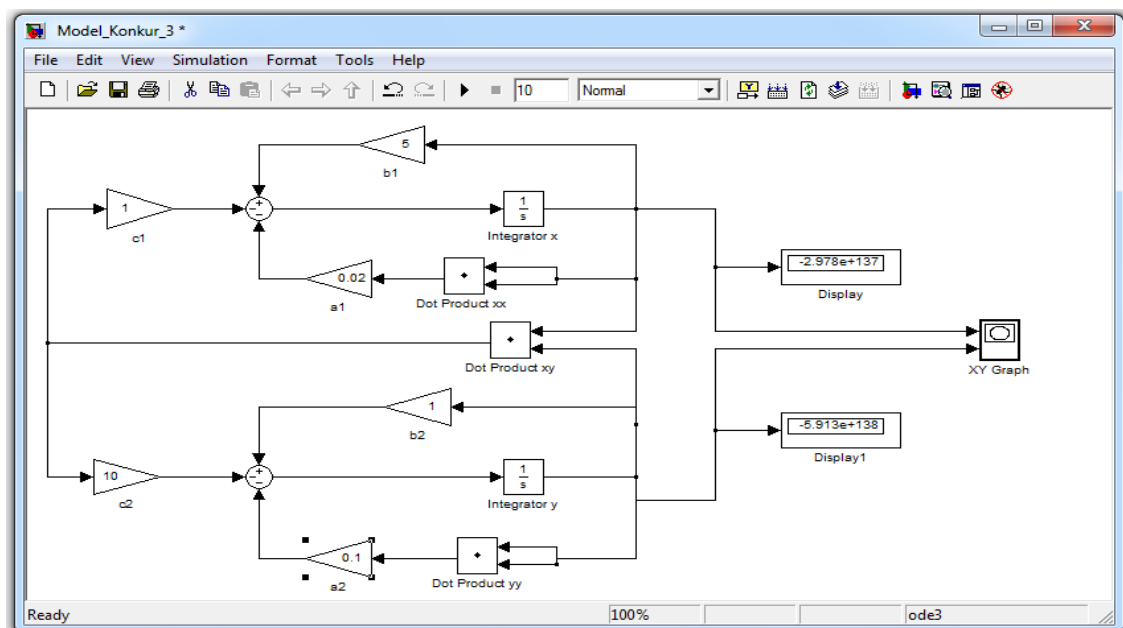


Рисунок 1 — Структурная схема модели — блок-диаграмма

С помощью пакета MatLab+Simulink найдем положения равновесия при выбранных параметрах, в результа-

1) $x_1^* = 0, y_1^* = 0$; 2) $x_2^* = 0, y_2^* = 10$; 3) $x_3^* = 250, y_3^* = 0$; 4) $x_4^* = 0,05, y_4^* = 5,0$.

Обсуждение

Рассмотрим полученные с помощью пакета MatLab+Simulink результаты вычислений собственных значений матрицы системы, линеаризованной в окрестности положения равновесия, для каждого положения равновесия:

1) $\lambda_1 = 1 > 0, \lambda_2 = 5 > 0 \Rightarrow$ точка $(0; 0)$ является неустойчивым узлом;

2) $\lambda_1 = -1 < 0, \lambda_2 = -5 < 0 \Rightarrow$ точка $(0; 10)$ является устойчивым узлом;

те получим, что система имеет четыре положения равновесия:

3) $\lambda_1 = -5 < 0, \lambda_2 = -2499 < 0 \Rightarrow$ точка $(250; 0)$ является устойчивым узлом;

4) $\lambda_1 = 1,3496 > 0, \lambda_2 = -1,8516 < 0 \Rightarrow$ точка $(0,05; 5,0)$ является седлом.

На рисунке 2 представлен фазовый портрет вблизи седловой точки $(0,05; 5,0)$ для выбранных ранее коэффициентов модели. Начальные условия выбраны следующим образом: $x(0)$ — от 0,01 до 0,36 с шагом 0,05, $y(0)$ — от 1 до 9 с шагом 2.

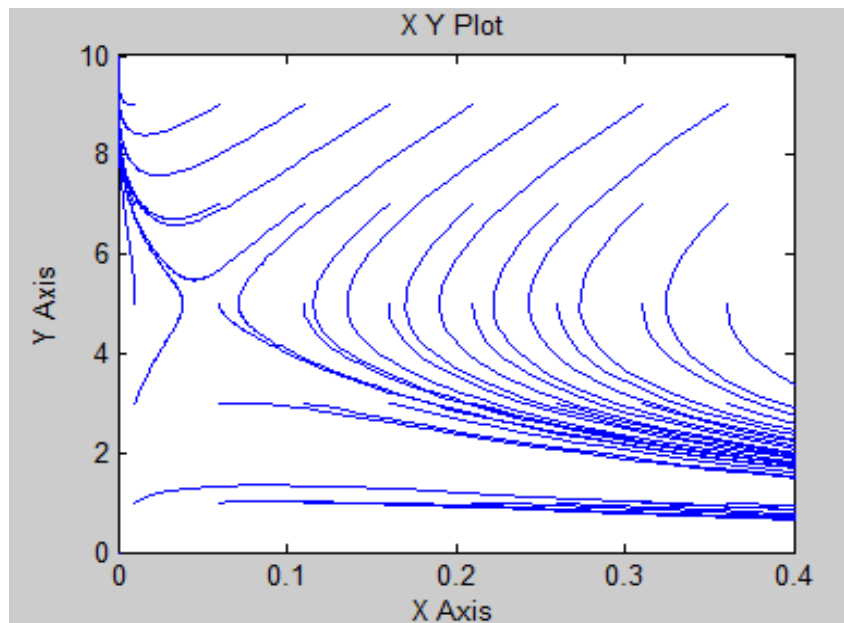


Рисунок 2 — Фазовый портрет

Выводы

Хищная конкуренция неустойчива. Фазовые траектории — сепаратрисы — подходят к положению равновесия — седлу — и тут же удаляются. Другими словами, отношение между конкурентами носит неустойчивый характер — благополучие и стабильность исчезают в течение быстрого времени. Однако с экономической точки зрения мы можем оценить динамику поведения фазовой траектории каждого конкурента во времени при заданных конкретных начальных условиях.

Библиографический список

1. *Bratishchev, A. V., Batishcheva, G. A., Zhuravliova, M. I.* Bifurcation analysis and synergetic management of dynamic system «Intermediary activity» // *Advances in intelligent systems and computing.* — 2019. — Vol. 896. — P. 659–667; *Application of Fuzzy Systems and Soft Computing, ICAFS 2018 : 13th International conf.* — Warsaw, 2018.

2. *Братищев, А. В., Батищева, Г. А., Журавлёва, М. И.* Бифуркационный анализ и синергетическое управление ди-

намической системой «посредническая деятельность» // Интеллектуальные ресурсы — региональному развитию. — 2018. — № 1. — Т. 4. — С. 2009–2013.

3. *Братищев, А. В., Журавлёва, М. И.* Бифуркационный анализ и синергетическое управление системой «валовой продукт — трудовой ресурс» // Вестник РГЭУ (РИНХ). — 2015. — № 2 (50). — С. 147–155.

4. *Баутин, Н. Н., Леонтович, Е. А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. — М., 1990.

5. *Милованов, В. П.* Неравновесные социально-экономические системы: синергетика и самоорганизация. — М., 2001.

Bibliographic list

1. *Bratishchev, A. V., Batishcheva, G. A., Zhuravliova, M. I.* Bifurcation analysis and synergetic management of dynamic system «Intermediary activity» // *Advances in Intel-*

ligent Systems and Computing. — 2019. — Vol. 896. — P. 659–667; *Application of Fuzzy Systems and Soft Computing, ICAFS 2018 : 13th International Conf.* — Warsaw, 2018.

2. *Bratishchev, A. V., Batishcheva, G. A., Zhuravliova, M. I.* Bifurcation analysis and synergetic management of dynamic system «intermediary activity» // *Intellectual resources for regional development.* — 2018. — № 1. — Vol. 4. — P. 2009–2013.

3. *Bratishchev, A. V., Zhuravliova, M. I.* Bifurcation analysis and synergetic management of system «gross product — labor resource» // *Vestnik of RSUE (RINH).* — 2015. — № 2 (50). — P. 147–155.

4. *Bautin, N. N., Leontovich, E. A.* Methods and techniques of qualitative research of dynamic systems on plane. — М., 1990.

5. *Milovanov, V. P.* Nonequilibrium socio-economic systems: synergetics and self-organization. — М., 2001.