

П. В. Николенко, С. В. Рогожин

О МИНИМУМЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ДОСТИЖЕНИЯ НУЖНОЙ ФОНДОВОООРУЖЕННОСТИ

Аннотация

В модели «инвестиции — потребление» рассматривается вопрос о достижении нужного уровня фондовооруженности к фиксированному моменту времени. Рост фондовооруженности обеспечивают собственные инвестиции, если их недостаточно для достижения поставленной цели, то необходимо привлекать дополнительные средства. При этом результат зависит как от величины привлеченных средств, так и от формы финансового потока, в котором они поступят.

Установлен минимальный объем средств, которые необходимо привлечь дополнительно к собственным инвестициям и форма финансового потока, в котором они должны поступать, чтобы поставленная цель была достигнута.

Ключевые слова

Производственная функция, фондовооруженность, управление, принцип максимума Понтрягина.

P. V. Nikolenko, S. V. Rogozhin

ON THE MINIMUM OF ADDITIONAL MEANS TO ACHIEVE THE NECESSARY CAPITAL EQUIPMENT

Annotation

In the «investment — consumption» model, concern of achieving the required capital-labor ratio by a fixed point in time is being considered. Growth of the fund capacity is provided by own investments, if they are not enough to achieve the goal, then it is necessary to attract additional funds. At the same time, result depends both on the amount of funds raised and on the form of financial flow in which they will arrive.

There is a minimum amount of funds that must be attracted in addition to their own investments and form of financial flow in which they must flow in order for the goal to be achieved.

Keywords

Production function, capital-labor ratio, management, Pontryagin's maximum principle.

Введение

Постановка задачи. Если инвестиция производится в виде финансового потока заданного объема, то результат зависит от его формы. Если известна константа, ограничивающая сверху плотность потока, то можно ставить вопрос о том, какой поток даст наилучший результат. Ниже обсуждается вопрос о форме финансового потока минимального объема, который позволит довести уровень фондовооруженности до нужного значения за фиксированное время.

Динамика фондовооруженности [1, 2] в модели «инвестиции — потребление» подчинена закону:

$$\dot{x} = sf(x) - \mu x,$$

где x — фондовооруженность;
 $\dot{x}$ — производная по времени;
 f — производственная функция;
 μ — коэффициент амортизации производственных фондов;
 $s \in (0, 1)$ — доля произведенной стоимости, которая возвращается в производство в виде инвестиций.

Пусть рассматривается процесс на фиксированном отрезке времени $[0, T]$, фондовооруженность в нулевой момент времени $x(0) = x_0$, и поставлена цель: к моменту T достигнуть фондовооруженности x_1 ($x_1 > x_0$). Предположим, что собственных инвестиций $sf(x)$ для достижения поставленной цели не хватает (это означает, что $\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{sf(x) - \mu x} > T$ — интеграл представляет собой время перемещения x от x_0 до x_1 , если динамика подчинена вышеописанному закону).

Пусть для достижения поставленной цели дополнительно привлечены средства в объеме S , которые поступают в виде финансового потока $u(t) \in [0, p]$, где p — предельная способность к поглощению инвестиций, так что $\int_0^T u(t) dt = S$.

Под воздействием дополнительных средств закон динамики фондовооруженности приобретает вид $\dot{x} = sf(x) - \mu x + u(t)$.

Предположим, что собственных инвестиций и привлеченных средств (объем которых не превосходит pT) достаточно для достижения поставленной цели — это означает, что выполняется неравенство $\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{sf(x) - \mu x + p} \leq T$.

Поставим вопрос о минимальном объеме средств и форме $u(t)$, в которой эти средства должны быть инвестированы, чтобы поставленная цель была достигнута. Относительно функции f предполагаем, что для нее выполняется свойства производственных функций: $f' > 0$, $f'' < 0$.

$$\psi_0 u + \psi[F(x) + u] = \max_{v \in [0, p]} (\psi_0 v + \psi(F(x) + v))$$

При анализе условия максимума следует рассмотреть два случая: $\Psi_0 = 0$ и $\Psi_0 < 0$ (можно брать $\Psi_0 = -1$).

В случае $\Psi_0 = 0$, Ψ — не тривиальное решение уравнения $\dot{\Psi} = -\Psi F'(x)$ и, следовательно, знак Ψ сохраняется. Отсюда следует, что $u = 0$ при $\Psi < 0$ при всех $t \in [0, T]$ — это соответствует триви-

Обозначим функцию $sf(x) - \mu x$ через $F(x)$ и будем предполагать, что F' на промежутке $[x_0, x_1]$, один раз меняет знак с плюса на минус, (если знак F' сохраняется, то ответ на поставленный вопрос легко усматривается из нижеизложенного).

Вопрос о наискорейшем выходе на заданный уровень фондовооруженности при выделении фиксированной суммы S рассматривался в [3, 4].

Материалы и методы

Формулировка и исследование возникающей задачи теории управления.

Запишем полученную задачу как задачу теории управления и воспользуемся для ее исследования принципом максимума Понтрягина [1, 2]).

$$L = \int_0^T u(t) dt \rightarrow \min$$

$$\dot{x} = F(x) + u,$$

$$u(t) \in [0, p]$$

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_1$$

Момент T фиксирован. Среди всех управлений u , которые переводят фондовооруженность из положения x_0 в положение x_1 за время T , следует выбрать то, для которого суммарные затраты $\int_0^T u(t) dt$ минимальны.

Результаты

Составим функцию Понтрягина

$$H = \psi_0 u + \psi(F(x) + u)$$

и сопряженное уравнение

$$\dot{\Psi} = -H_x = -\Psi F'(x).$$

Если (x, u) оптимальный процесс, то найдется константа $\Psi_0 \leq 0$ и решение Ψ сопряженного уравнения такое, что при всех $t \in [0, T]$ выполняется условие максимума

альному случаю, когда фондовооруженность x_1 достижима в указанное время за счет собственных инвестиций. При $\psi > 0$ $u = p$ при всех $t \in [0, T]$, что так же соответствует тривиальному случаю, когда требуется привлечь максимально большую сумму pT . В этом случае выполняется равенство

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{F(x)+p} = T.$$

Рассмотрим случай $\Psi_0 < 0$, положим $\Psi_0 = -1$, тогда

$$H = (\Psi - 1)u + \Psi F(x).$$

Если (x, u) оптимальный процесс, то найдется решение сопряженного уравнения, такое что

$$H(\Psi, x, u) = \max_{v \in [0, p]} H(\Psi, x, v), \quad 0 \leq v \leq p$$

Следовательно, $u = p$ при $\Psi > 1$, $u = 0$ при $\Psi < 1$. Поскольку x возрастающая функция времени, условие $\Psi = 1$ может выполняться лишь в изолированных точках. Нам следует рассмотреть лишь случай, когда величина $\Psi - 1$ меняет знак, так как сохраненные знаки величиной $\Psi - 1$ влечет за собой постоянство управления u на всем промежутке $[0, T]$, а эти случаи уже рассмотрены. Так как функция Ψ — решение линейного однородного уравнения, она сохраняет свой знак и, поскольку нас интересует случай, при котором $\Psi - 1$ меняет знак, знак Ψ положительный. Поскольку x возрастает от x_0 до x_1 , $F'(x)$ меняет знак с положительного на отрицательный при переходе через некоторую точку t_1 , где $t \in (0, T)$. Соответственно, поскольку

$$\dot{\Psi} = -\Psi F'(x) \quad \text{и} \quad \Psi > 0$$

получаем: Ψ убывает при $t \in [0, t_1)$ и возрастает при $t \in [t_1, T]$ отсюда функция $\Psi - 1$ и, соответственно, величина u ведет себя одним из нижеследующих способов:

а) для некоторого $t' \in (0, T)$, такого что $F'(x(t')) \geq 0$

$\Psi - 1 > 0$ при $t \in [0, t')$ и $u = p$;

$\Psi - 1 < 0$ при $t \in (t', T]$ и $u = 0$;

б) для некоторого $t'' \in (0, T)$, такого что $F'(x(t'')) \leq 0$

$\Psi - 1 < 0$ при $t \in [0, t'')$ и $u = 0$;

$\Psi - 1 > 0$ при $t \in (t'', T]$ и $u = p$;

в) для некоторых $t' < t''$

$\Psi - 1 > 0$ при $t \in [0, t') \cup (t'', T]$ и $u = p$;

$\Psi - 1 < 0$ при $t \in (t', t'')$ и $u = 0$.

Чтобы получить полное описание управления u воспользуемся тем, что в финальный момент T фондovoоруженность достигнет значения x_1 . При этом мы получим описание u как функции фондovoоруженности x .

В случае а) фондovoоруженность x в момент t' достигнет значения x' , при этом пока x меняется от x_0 до x'

$$u = p \quad \text{и} \quad \dot{x} = F(x) + p;$$

при изменении x от x' до x_1

$$u = 0 \quad \text{и} \quad \dot{x} = F(x).$$

Поскольку время изменения x от x^0 до x^1 есть T , имеем уравнение

$$\int_0^{x'} \frac{dx}{F(x)+p} + \int_{x'}^{x_1} \frac{dx}{F(x)} = T,$$

из которого x' однозначно определяется, так как в левой части уравнения записана монотонная функция аргумента x' (в чем можно убедиться проинтегрировав левую часть по x') при этом объем привлеченных средств составит величину

$$p \int_{x_0}^{x'} \frac{dx}{F(x)+p} = A$$

Случай б) аналогичен случаю а) и для определения x'' имеем уравнение

$$\int_0^{x''} \frac{dx}{F(x)} + \int_{x''}^{x_1} \frac{dx}{F(x)+p} = T,$$

объем привлеченных средств составит величину

$$p \int_{x''}^{x_1} \frac{dx}{F(x)+p} = B$$

В случае в) установим связь между величинами $x' = x(t')$ и $x'' = x(t'')$ с помощью следующей леммы.

Лемма. Пусть (x, Ψ) решение системы $\begin{cases} \dot{x} = F(x) \\ \dot{\Psi} = -\Psi F'(x), \end{cases}$ причем $\Psi \neq 0$. Если $\Psi(t') = \Psi(t'')$, то $F(x') = F(x'')$.

Доказательство леммы

Система является гамильтоновой с функцией $H = \Psi F(x)$. Следовательно, $H(x(t), \Psi(t))$ константа, в частности,

$$\begin{aligned} \Psi(t')F(x(t')) &= \Psi(t'')F(x(t'')) \\ \Psi(t')[F(x') - F(x'')] &= 0 \quad \text{или} \\ \Psi \neq 0, F(x') &= F(x''). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Так как, $\Psi(t') = \Psi(t'') = 1$, получаем что $F(x') = F(x'')$.

Таким образом, для определения значений x' и x'' , имеем систему, из которой x', x'' определяются однозначно

$$\begin{cases} \int_{x_0}^{x'} \frac{dx}{F(x) + p} + \int_{x''}^{x'} \frac{dx}{F(x)} + \int_{x''}^{x_1} \frac{dx}{F(x) + p} = T \\ F(x') = F(x'') \end{cases}$$

объем привлеченных средств составит величину

$$p \left(\int_{x_0}^{x'} \frac{dx}{F(x) + p} + \int_{x''}^{x_1} \frac{dx}{F(x) + p} \right) = B$$

Выводы

Привлекаемые средства должны расходоваться в максимальном темпе p на промежутках времени определяемых из условий а), б), в).

Минимальная сумма, которую необходимо привлечь для достижения поставленной цели, есть $\min\{A, B, V\}$.

Библиографический список

1. Ашманов, С. А. Введение в математическую экономику. — М., 1984.

2. Николенко, П. В. Непрерывные математические модели : учеб. пособие. — Ростов-на-Дону, 2014.

3. Николенко, П. В., Савченко, Д. В. Дополнительное инвестирование и динамика фондовооруженности в модели «Инвестиции-потребление» // Информационные системы, экономика и управление : уч. зап. — Ростов-на-Дону, 2019. — С. 39–43.

4. Николенко, П. В. Оптимальная форма заемных средств в задаче о наискорейшем выходе на заданный уровень фондовооруженности // Вестник РГЭУ (РИНХ). — 2020. — С. 157–163.

Bibliographic list

1. Ashmanov, S. A. Introduction to mathematical economics. — M., 1984.

2. Nikolenko, P. V. Continuous mathematical models : textbook. — Rostov-on-Don, 2014.

3. Nikolenko, P. V. Savchenko, D.V. Additional investment and dynamic of capital-to-labor ratio in «investment — consumption» model // Information Systems, Economics and Management : comp. of articles. — Rostov-on-Don, 2019. — P. 39–43.

4. Nikolenko, P. V. Optimal form of borrowed funds in problem of the fastest exit to a given level of capital-to-labor ratio // Vestnik of RSUE (RINH). — 2020. — № 1 (69). — P. 163.