

**ОПТИМАЛЬНАЯ ФОРМА ЗАЕМНЫХ СРЕДСТВ
В ЗАДАЧЕ О НАИСКОРЕЙШЕМ ВЫХОДЕ
НА ЗАДАННЫЙ УРОВЕНЬ ФОНДОВООРУЖЕННОСТИ**

Аннотация

В модели «инвестиции-потребление» рассматривается вопрос о наискорейшем достижении фондовооруженности благоденствия. Это такой уровень фондовооруженности, при котором потребление максимально при стационарном режиме работы. Изучается вопрос об оптимальном способе расходования заемных средств, которые привлечены для уменьшения времени выхода на указанный уровень фондовооруженности. Указана максимальная величина заемных средств, которые могут быть использованы для достижения указанной цели. Если заемные средства привлечены в меньшем объеме, то расходовать их нужно в максимальном темпе, начиная с момента, способ вычисления которого указан в статье.

Ключевые слова

Производственная функция, фондовооруженность, управление, принцип максимума Понтрягина.

P. V. Nikolenko

**OPTIMAL FORM OF BORROWED FUNDS
IN PROBLEM OF THE FASTEST EXIT
TO A GIVEN LEVEL OF CAPITAL-TO-LABOR RATIO**

Annotation

In model of investment-consumption, question of the fastest achievement of well-being capital ratio is considered. This is a level of capital-to-capital ratio, at which the consumption is maximum in stationary mode of operation. Question of optimal method of spending borrowed funds, which are attracted to reduce the time to reach this level, is being studied. Maximum amount of borrowed funds that can be used to achieve this goal is indicated. If the borrowed funds are attracted in a smaller amount, then they should be spent at maximum rate, starting from moment the method of calculation of which is specified in article.

Keywords

Production function of capital-to-labor ratio, management, Pontryagin maximum principle.

Введение

Постановка задачи об оптимальной форме заемных средств.

Динамика фондовооруженности (см. [1], [2]) в модели инвестиции — потребление подчинена закону:

$$\dot{k} = uf(k) - \mu k,$$

где k — фондовооруженность;

f — производственная функция;

μ — коэффициент амортизации производственных фондов;

управление $u = u(t) \in [0, 1]$ — доля произведенной стоимости, которая возвращается в производства в виде инвестиций.

Поясним уравнение динамики фондовооруженности. Рассмотрим промежуток времени $[t, t + \Delta t]$, за это время фондовооруженность изменится на величину Δk , которая состоит из двух слагаемых: за время Δt объем списанных фондов в расчете на одного работающего составит величину $\mu k(t) \Delta t$ (с точностью до малых более высокого порядка), за время Δt фонды возрастут за счет инвестиций в расчете на одного работающего на величину $u(t)f(k(t))\Delta t$ (с точностью до малых более высокого порядка). Таким образом, $\Delta k = uf(k)\Delta t - \mu k \Delta t$, деля это уравнение на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем уравнение динамики фондовооруженности.

Величина $(1 - u)f(k)$ составляет потребление в данный момент времени. Если выбрать u в текущий момент времени из условия $uf(k) - \mu k = 0$, то процесс станет стационарным: фондовооруженность, инвестиции и потребление будут оставаться неизменными. Такое значение фондовооруженности $\tilde{k}$,

при котором потребление максимально при стационарном режиме, называется фондовооруженностью благоденствия. Она однозначно определяется условием $f'(k) = \mu$ (предполагается, что для производственной функции выполняются обычные условия: $f' > 0, f'' < 0$). Если рассматривается достаточно длительный промежуток времени $[0, T]$, в начальный момент $k(0) = k_0 < \tilde{k}$ и поставлена задача выбора управления u так, чтобы фондовооруженность достигла значения $\tilde{k}$: $k(T) = \tilde{k}$, и потребление за весь промежуток времени оказалось максимальным, то, как показано в [1], [2], указанное управление имеет вид: $u = 1$ до момента достижения величиной k значения $\tilde{k}$, после этого

$$u = \frac{\mu \tilde{k}}{f(\tilde{k})}.$$

Таким образом, пока $u = 1$ потребление отсутствует. Пусть с целью сокращения времени достижения величиной k значения $\tilde{k}$, в процесс привлечены заемные средства объема S , которые поступают в виде потока $s(t)$. Таким образом, до момента t_1 такого, что $k(t_1) = \tilde{k}$, фондовооруженность меняется по закону:

$$\dot{k} = F(k) + s$$

где $0 \leq s \leq s_0$ (s_0 — предельная способность поглощения инвестиций),

$$F(k) = f(k) - \mu k, \int_0^{t_1} s(t) dt = S.$$

Поставим вопрос о поиске потока $s(t)$, который обеспечит наискорейший выход на фондовооруженность $\tilde{k}$. Таким образом, следует так управлять интенсивностью поступающих средств, чтобы фондовооруженность максимально быстро достигла значения $\tilde{k}$.

Материала и методы

Формулировка и исследование возникающей задачи теории управления.

Запишем полученную задачу как задачу теории управления и воспользуемся для ее исследования принципом максимума Понтрягина (см. [3, с. 320]).

$$B_0 = t_1 \rightarrow \min (1)$$

$$\dot{k} = F(k) + s, s(t) \in [0, s_0] (2)$$

$$B_1 = \int_0^{t_1} s(t) dt - S = 0 (3)$$

$$B_2 = k(0) - k_0 = 0 (4)$$

$$B_3 = k(t_1) - \tilde{k} = 0 (5)$$

Требуется найти $\min B_0$ при выполнении условий (2) — (5).

Прокомментируем условия (1) — (5). Условие (1) означает, что отыскивается процесс минимальной продолжительности; в условии (2) записан закон динамики фондовооруженности; условие (3) означает, что заемные средства

$$\mathcal{L} = \int_0^{t_1} (\lambda_1 s + p(\dot{k} - F(k) - s)) dt + \lambda_0 t_1 - \lambda_1 S + \lambda_2 (k(0) - k_0) + \lambda_3 (k(t_1) - \tilde{k})$$

Обозначим оптимальный процесс символом $(\hat{p}, \hat{k}, \hat{s})$. Выпишем условия оптимальности $(\hat{p}, \hat{k}, \hat{s})$.

а) стационарность по k :

$$-\hat{p} - \hat{p}'(\hat{k}) = 0 (6)$$

б) трансверсальность по k :

$$\hat{p}(0) = \lambda_2, \hat{p}(t_1) = -\lambda_3 (7)$$

в) оптимальность по s :

$$\min_s (\lambda_1 s - \hat{p}s) = (\lambda_1 - \hat{p}) \hat{s} (8)$$

следовательно, $\hat{s} = \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda_1 > \hat{p} \\ s_0, & \text{если } \lambda_1 < \hat{p} \end{cases}$

г) стационарность по t_1 :

$$\lambda_0 + \lambda_1 \hat{s}(t_1) + \lambda_3 \hat{k}(t_1) = 0 (9)$$

При этом надо рассмотреть случаи $\lambda_0 = 1$ и $\lambda_0 = 0$. Пусть $\lambda_0 = 1$.

1) Рассмотрим случай $1 + \lambda_1 \hat{s}(t_1) = 0$, тогда из (9) следует, что $\lambda_3 = 0$,

равны S ; условие (4) показывает, что на момент начала процесса фондовооруженность составляла величину k_0 ; условие (5) показывает, что к моменту завершения процесса достигнута фондовооруженность $\tilde{k}$. Отметим, прежде всего, что если заемные средства поступают постоянным потоком в течение всего времени, то есть выполняется условие: $\dot{k} = F(k) + s_0$, то время процесса

составит величину $\int_{k_0}^{\tilde{k}} \frac{dk}{F(k) + s_0}$,

а вся затраченная сумма это $\tilde{S} = s_0 \int_{k_0}^{\tilde{k}} \frac{dk}{F(k) + s_0}$.

Таким образом, не следует занимать больше, чем $\tilde{S}$. Далее полагаем, что заемные средства S меньше, чем $\tilde{S}$.

Составим функцию Лагранжа.

так как $\hat{k} > 0$, и из (7) и (6) получаем $\lambda_2 = \lambda_3 = 0, \hat{p} = 0$.

Тогда $\lambda_1 < 0$ и в силу (8) $\hat{s} \equiv s_0$, чего не может быть, так как $S < \tilde{S}$.

2) Рассмотрим случай $1 + \lambda_1 \hat{s}(t_1) > 0$.

Тогда из (9) получаем $\lambda_3 < 0$, так как $\hat{k} > 0$ и из (6) с учетом (7) следует, что $\hat{p}$ положительна и монотонно убывает. Поэтому из (8) следует, что либо $\hat{s}$ константа (что для нас интереса не представляет, поскольку $S < \tilde{S}$), либо $\hat{s}$ принимает два значения: сперва s_0 , потом, на завершающем этапе, нуль.

3) Рассмотрим случай $1 + \lambda_1 \hat{s}(t_1) < 0$.

Тогда из (9) получаем, что $\lambda_3 > 0$ и из (6) и (7) получаем, что $\hat{p}$ отрицательна и монотонно возрастает. Поскольку λ_1

в этом случае отрицательна, $\hat{s}$ может принимать два значения: сперва нуль и на завершающем этапе s_0 .

Пусть $\lambda_0 = 0$.

4) Рассмотрим случай $\lambda_1 \hat{s}(t_1) = 0$. Тогда из (9) получаем $\lambda_0 = 0$, из (6) и (7) получаем $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\hat{p} = 0$. Из нетривиальности набора (λ, p) получаем, что $\lambda_1 \neq 0$, тогда $\hat{s}(t_1) = 0$ и, следовательно, в силу (8), $\lambda_1 > 0$ и $\hat{s} \equiv s_0$ чего не может быть в силу $S < \tilde{S}$.

5) Рассмотрим случай $\lambda_1 \hat{s}(t_1) > 0$. Тогда из (9) получаем, что $\lambda_3 < 0$ и из (7) и (6) следует, что $\hat{p}$ положительна и монотонно убывает. Откуда $\hat{s}$ может принять два значения: сперва s_0 , потом нуль.

6) Рассмотрим случай $\lambda_1 \hat{s}(t_1) < 0$. Тогда из (9) получаем, что $\lambda_3 > 0$ и из (7) и (6) следует, что $\hat{s}$ может принять два значения: сперва нуль и на завершающем этапе s_0 .

Результаты

Принцип максимума Понтрягина выделил два процесса, которые могут оказаться оптимальными. В первом случае $\hat{s} = s_0$ от момента нуль до момента, когда заемные средства окажутся израсходованными, в этот момент фондовооруженность достигнет величины k_1 , такой что $s_0 \int_{k_0}^{k_1} \frac{dk}{F(k) + s_0} = S$ (10).

Во втором случае $\hat{s} = 0$ от момента нуль до момента достижения фондовооруженностью значения k_2 , после чего $\hat{s}$ принимает значение s_0 , где k_2 однозначно определяется из уравнения

$$s_0 \int_{k_2}^{\tilde{k}} \frac{dk}{F(k) + s_0} = S \quad (11).$$

Обсуждение

Рассмотрим пример. Пусть $F(k) = 1,5k^{\frac{2}{3}} - 0,1k$, тогда $F'(1000) = 0$, таким образом фондовооруженность благоденствия $\tilde{k} = 1000$. Пусть на нулевой момент времени фондовооруженность составляет величину $k_0 = 800$ и придельная способность к поглощению инвестиций $S^0 = 100$. Сравним три различных способа займа суммы $S = 102,4$. В варианте А) средства поделены так, что поступают равномерно пока фондовооруженность не достигнет значения $\tilde{k}$; в варианте Б) средства поступают в максимальном темпе s_0 начиная с нулевого момента времени в соответствии с формулой (10); в варианте В) средства поступают в максимальном темпе на финальном отрезке времени в соответствии с формулой (11). Согласно доказанному оптимальным окажется вариант Б) или В)

А) Если положить $s_1 \equiv 50$, то получим

$$\int_{800}^{1000} \frac{dk}{F(k) + 50} = 2,048 = T_1, s_1 T_1 = S.$$

Занятые средства равномерно распределены на весь промежуток времени. Время $T_1 = 2,048$.

Б) Пусть поток s_2 определен в соответствии с формулой (10).

$$s_2(t) = \begin{cases} 100, & \text{если } t \leq 1,024 \\ 0, & \text{если } t > 1,024 \end{cases},$$

тогда, решив задачу Коши $\begin{cases} \dot{k} = F(k) + 100 \\ k(0) = 800 \end{cases}$, получим $k(1,024) = 957$.

Вычисляем интеграл $\int_{957}^{1000} \frac{dk}{F(k)} = 0,94$. Тогда время достижения величиной k значения $\tilde{k} = 1000$ есть

$$T_2 = 0,94 + 1,024 = 1,964.$$

В) Пусть поток s_3 определен в соответствии с формулой (11). Проводя вычисления, получаем

$$\int_{820}^{1000} \frac{dk}{F(k) + 100} = 1,024$$

$$\int_{800}^{820} \frac{dk}{F(k)} = 0,405$$

Таким образом, $T_3 = 1,429$.

Оптимальным является поток S_3 .

Выводы

Привлекаемые средства следует расходовать в максимальном темпе s_0 . Пока заемные средства тратятся, процесс протекает по закону:

$$\dot{k} = F(k) + s_0 \quad (12)$$

А в остальное время по закону:

$$\dot{k} = F(k)$$

Для выбора момента начала потребления заемных средств, следует сравнить два варианта с использованием формул (10), (11).

Не следует занимать более, чем величина

$$s_0 \int \frac{dk}{F(k) + s_0}$$

Этой суммы хватит, чтобы весь период роста фондовооруженности действовал закон (12).

Библиографический список

1. Ашманов, С. А. Введение в математическую экономику. — М., 1984.
2. Николенко, П. В. Непрерывные математические модели : учеб. пособие. — Ростов н/Д, 2014.
3. Алексеев, В. М., Тихомиров, В. М., Фомин, С. В. Оптимальное управление. — М., 1979.

Bibliographic list

1. Ashmanov, S. A. Introduction to mathematical economics. — M., 1984.
2. Nikolenko, P. V. Continuous mathematical models : textbook. — Rostov-on-Don, 2014.
3. Alekseev, V. M., Tikhomirov, V. M., Fomin, S. V. Optimal control. — M., 1979.