

РАЗДЕЛ 3. ФИНАНСОВО-КРЕДИТНЫЕ ОТНОШЕНИЯ И БУХГАЛТЕРСКИЙ УЧЕТ

*Г. А. Батищева, М. И. Журавлёва,
Г. В. Лукьянова, С. В. Пономарёва*

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАВНОВЕСИЯ В ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ «ПОСРЕДНИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ»

Аннотация

Компьютерные и информационные технологии — это технологии, помогающие человеку ускорить анализ политической, экономической, социальной и биологической ситуации и последующий синтез решений. В статье в рамках теории динамических систем исследуются на этапе анализа закономерности взаимосвязи экономических процессов. Рассмотрена задача в сфере посреднической деятельности, для которой построена модель в виде автономной динамической системы дифференциальных уравнений [1, 2, 6]. При построении S-моделей в случае численного анализа для конкретных параметров использовался пакет MatLab с графическим приложением Simulink; построены фазовые портреты для случая устойчивых фокусов фазовой плоскости.

Ключевые слова

Динамическая система, фазовый портрет, положение равновесия, бифуркация, пространство параметров, траектория, устойчивый узел, устойчивый фокус.

*G. A. Batishcheva, M. I. Zhuravliova,
G. V. Lukyanova, S. V. Ponomariova*

NONLINEAR DYNAMIC MODEL OF EQUILIBRIUM IN ECONOMIC SYSTEM «INTERMEDIARY ACTIVITY»

Annotation

Computer and information technologies are technologies that help people to accelerate the analysis of political, economic, social and biological situation and subsequent synthesis of solutions. In article within framework of theory of dynamic systems the regularities of interrelation of economic processes are investigated at the stage of analysis. Problem in sphere of mediation is considered, for which a model is constructed in form of Autonomous dynamic system of differential equations [1, 2, 6]. When constructing S-models in case of numerical analysis for specific parameters, MatLab package with graphical application Simulink was used and phase portraits for case of stable foci of phase plane were constructed.

Keywords

Dynamic system, phase portrait, equilibrium position, bifurcation, parameter space, trajectory, stable node, stable focus.

Введение

В экономических структурах интеллектуальные и информационные технологии играют ведущую роль в ис-

следовании поведения взаимосвязанных экономических субъектов. Взаимодействие направленности: анализа их состояний, определения положений их

равновесия с бифуркационным многообразием, и что особенно важно, задачи управления их поведением [5].

Материалы и методы

Одним из современных методов решения подобных задач является метод нелинейных динамических систем с применением теоретических и практических аспектов механики, математики, и в частности теории дифференциальных уравнений. Математические модели носят или «жесткий» характер, или так называемый «мягкий» характер, когда входящие в модель параметры имеют нечеткие границы. Используя динамические модели, можно решить задачи планирования и прогнозирования любой экономической проблемы и сделать анализ на устойчивость данной экономической системы.

Результаты

Применим методы качественной теории дифференциальных уравнений и методы нелинейной динамики к системе «Посредническая деятельность» [1, 2, 6].

$$\begin{cases} x'_t = a_1 - a_2xy + a_3xy^2 \\ y'_t = b_1 - b_2xy \end{cases} \quad (1)$$

здесь: $x(t)$ — сумма денежных средств, имеющихся в наличии у организации;

$y(t)$ — объем товара вида y , находящегося в обращении на рынке;

a_1 — прибыль организации, полученная за счет ее деятельности, за исключением реализации товара вида y ;

a_3xy^2 — прибыль, которую получает организация за счет продаж товара вида y , приобретенного ею на рынке с помощью создания снабженческой сети для перепродажи данного товара;

a_2xy (убыль денег), b_2xy (убыль товара) — конкурентные и обменные члены, показывающие количество денег вида x и количество товара вида y , покидающих рынок в результате выполнения организацией операций купли-продажи;

b_1 — объем постоянного поступления на рынок товара вида y в единицу времени.

Рассмотрим случай, когда параметры a_i, b_j ($i = \overline{1,3}; j = \overline{1,2}$) являются постоянными и положительными.

В общем виде математическая модель динамической системы двух взаимосвязанных объектов имеет вид:

$$\begin{cases} x'_t = F_1(x, y) \\ y'_t = F_2(x, y) \end{cases}$$

Если обозначить:

$$F_1(x, y) = a_1 - a_2xy + a_3xy^2, F_2(x, y) = b_1 - b_2xy,$$

то положение равновесия найдем из системы:

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0 \\ F_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

а матрица Якоби имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

где $S = (x_0, y_0)$ — положение равновесия.

Положение равновесия имеет вид:

$$S = \left(\frac{a_3 b_1^2}{b_2(a_2 b_1 - a_1 b_2)}, \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_3 b_1} \right), \text{ если } a_2 b_1 - a_1 b_2 \neq 0$$

$$\text{или } S = \left(\frac{b_1}{b_2 \tau}, \tau \right), \text{ если обозначить: } \tau = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_3 b_1}.$$

Исследуем характер положения равновесия при помощи Теоремы Ляпу-

нова [4]. В результате для системы (1) получим:

$$\begin{pmatrix} -a_2y + a_3y^2 & -a_2x + 2a_3xy \\ -b_2y & -b_2x \end{pmatrix} \text{ — матрица Якоби;}$$

$$\sigma = -\left(\frac{a_1b_2}{b_1}\tau + \frac{b_1}{\tau}\right) \text{ — след матрицы Якоби;}$$

$$\Delta = a_3b_1\tau \text{ — определитель матрицы Якоби для положения равновесия } S.$$

Собственные числа матрицы Якоби находятся из характеристиче-

ского уравнения: $\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0$, а именно:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{a_1b_2}{b_1}\tau + \frac{b_1}{\tau}\right) \mp \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{a_1b_2}{b_1}\tau + \frac{b_1}{\tau}\right)^2 - a_3b_1\tau}$$

Бифуркационный анализ показывает, что при $a_2b_1 - a_1b_2 > 0$ имеет место или устойчивый узел или устойчивый фокус. Рассмотрим этот случай при условии:

$$\left(\frac{a_1b_2}{b_1}\tau + \frac{b_1}{\tau}\right)^2 - 4a_3b_1\tau < 0.$$

Тогда собственные числа λ_1 и λ_2 есть комплексные с $\text{Re}(\lambda_i) < 0$, $i=1,2$. Нетрудно видеть, что положение равновесия S в этом случае для системы (1) есть устойчивый фокус.

Обсуждение

Рассмотрим численные эксперименты для случая фокусов. Проведение количественного анализа экономической модели, а также построение фазовых портретов и траекторий осуществлено с помощью пакета MatLab с графическим приложением Simulink. При помощи графического приложения Simulink создана структурная модель «Посредническая деятельность» — блок-диаграмма в виде направленного графа (рис. 1).

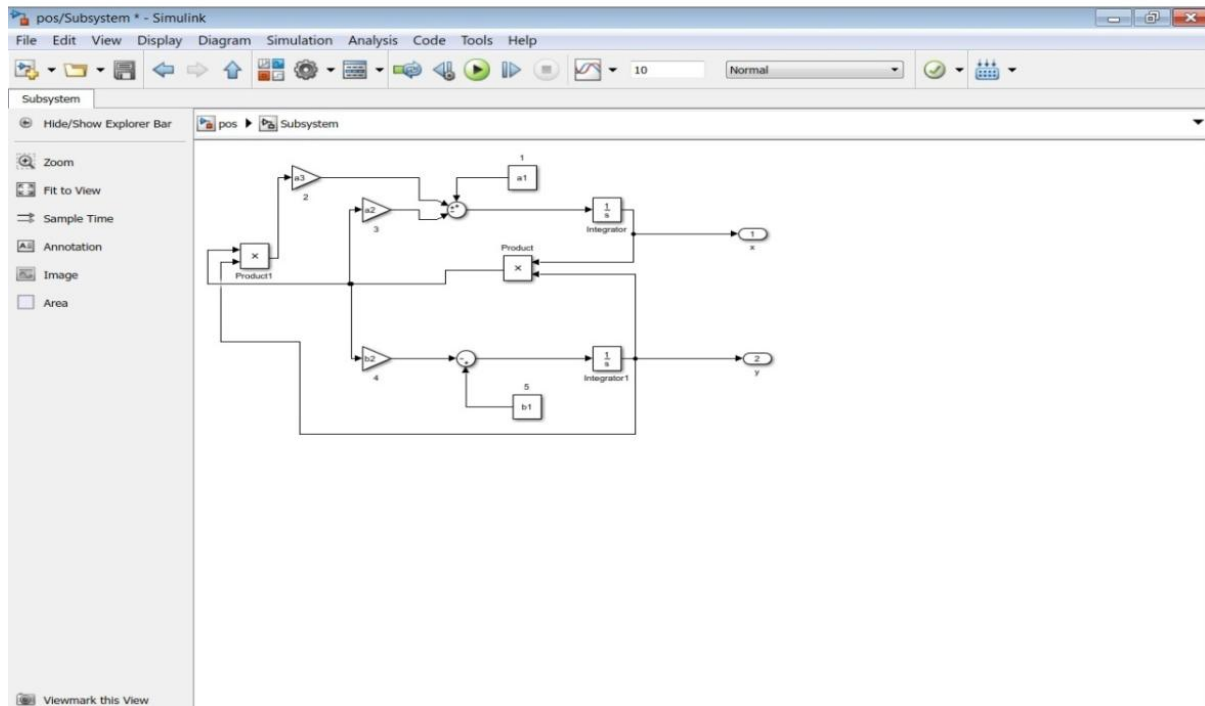


Рисунок 1 — Структурная модель «Посредническая деятельность»

Маскируем полученную модель для проведения вычислительных экспе-

риментов — действующая модель (рис. 2).

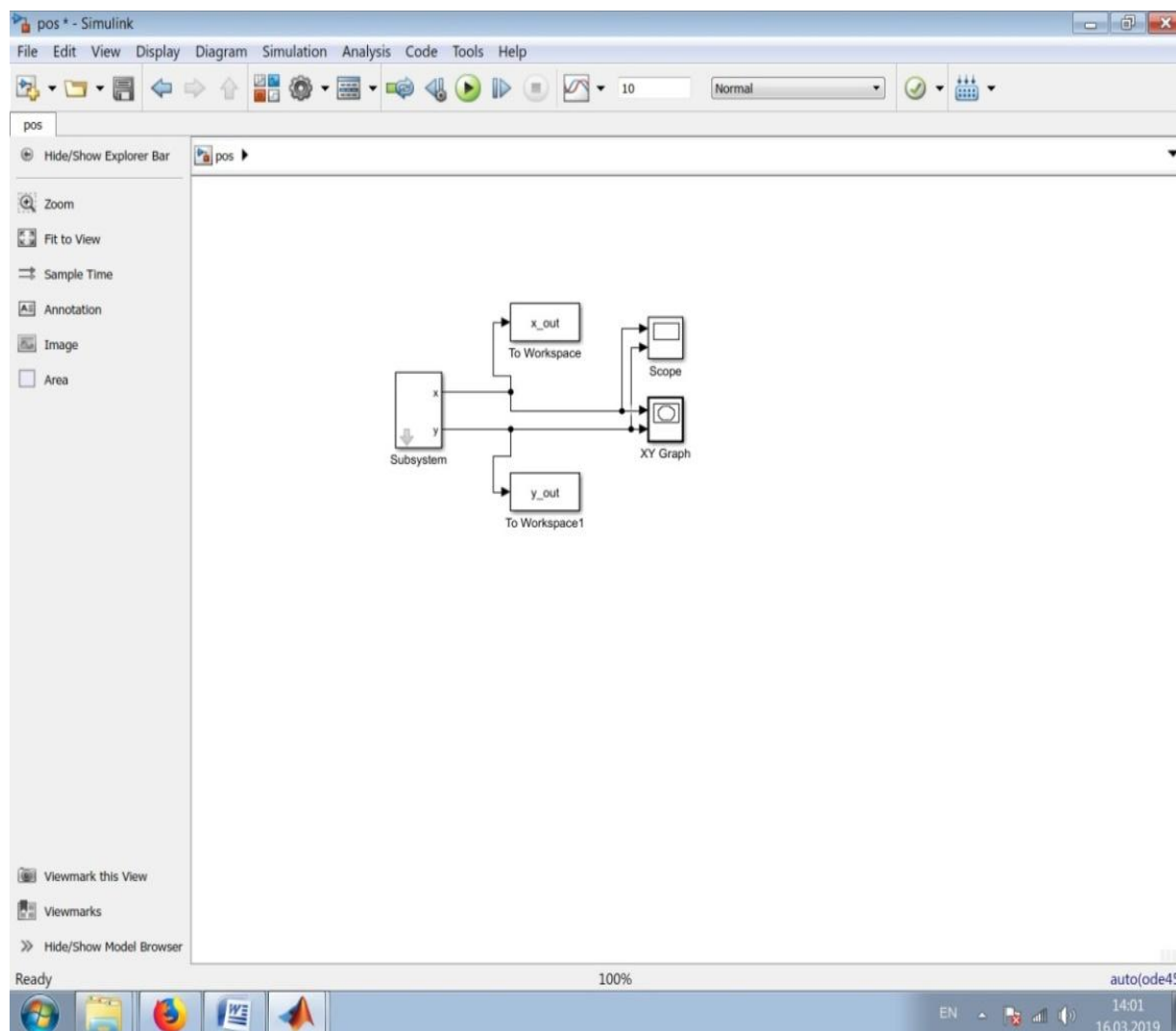


Рисунок 2 — Маскированная действующая модель
«Посредническая деятельность»

Произвольным образом выберем параметры, например:

$$a_1=3, a_2=4, a_3=1, b_1=5, b_2=1.$$

Получим следующие результаты:

$S = (25/17, 17/5)$ — вид положения равновесия;

$$\lambda_1 = -1.7553 + 3.7308i;$$

$$\lambda_2 = -1.7553 - 3.7308i,$$

λ_1, λ_2 — собственные числа матрицы Якоби).

Полученное при данных параметрах положение равновесия является устойчивым фокусом по теореме Ляпунова [3, 4]. На следующем этапе при выбранных параметрах построим фазовый портрет с начальными условиями от 0 до 5 с шагом 0.3 (рис. 3).

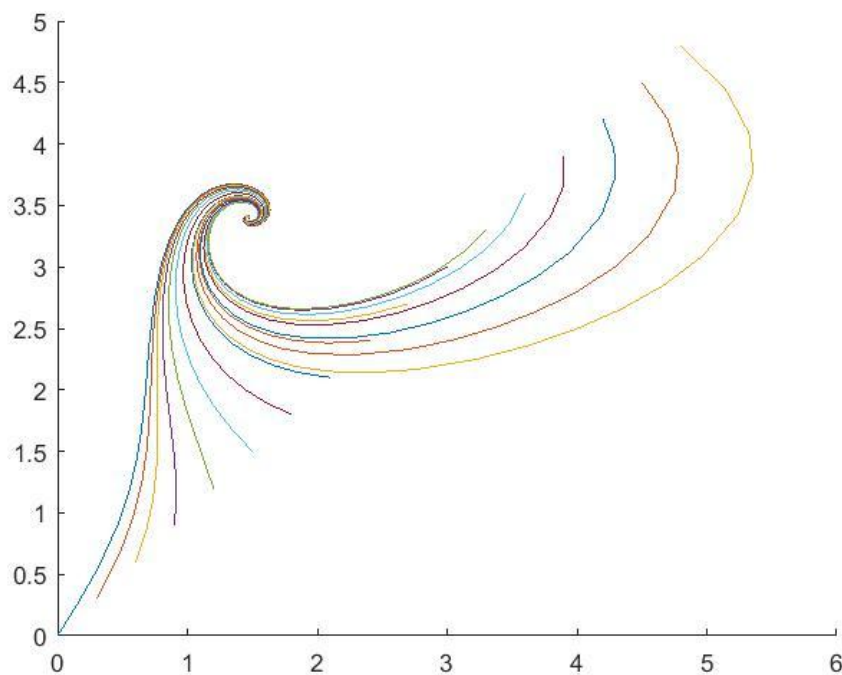


Рисунок 3 — Фазовый портрет с шагом

При выбранных параметрах $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $a_3 = 1$, $b_2 = 1$ изменим параметр b_1 на массив $b_1 = [5, 4, 3, 2, 1.5]$, в ре-

зультате при начальных условиях $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ получим фазовый портрет, представленный на рисунке 4.

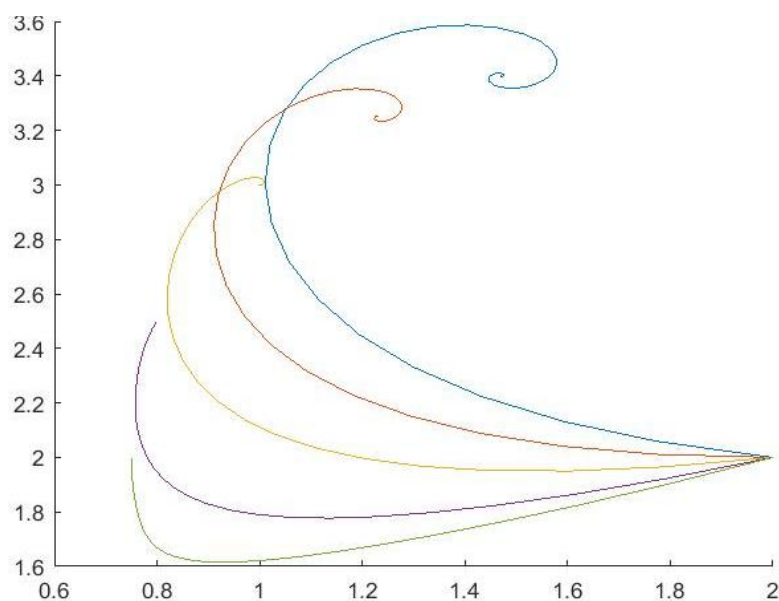


Рисунок 4 — Фазовый портрет с одним параметром, состоящим из массива

На следующем шаге произвольным образом выберем параметры, например: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $b_1 = 2$, $b_2 = 1$. Получим следующие результаты:

$S = (4/3, 3/2)$ — вид положения равновесия;

$$\lambda_1 = -1.0417 + 1.3838i;$$

$$\lambda_2 = -1.0417 - 1.3838i,$$

λ_1, λ_2 — собственные числа матрицы Якоби). Полученное при данных параметрах положение равновесия является устойчивым фокусом по теореме Ляпунова [3].

При выбранных параметрах ($a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1, b_1 = 2, b_2 = 1$) построим фазовый портрет при начальных условиях

от 0 до 5 с шагом 0,2, представленный на рисунке 5.

При выбранных параметрах ($a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1, b_1 = 2, b_2 = 1$) изменим параметр b_1 на массив $b_1 = [5, 4, 3, 2, 1.5]$ и построим фазовый портрет при начальных условиях $x(0)=2, y(0)=2$, представленный на рисунке 6.

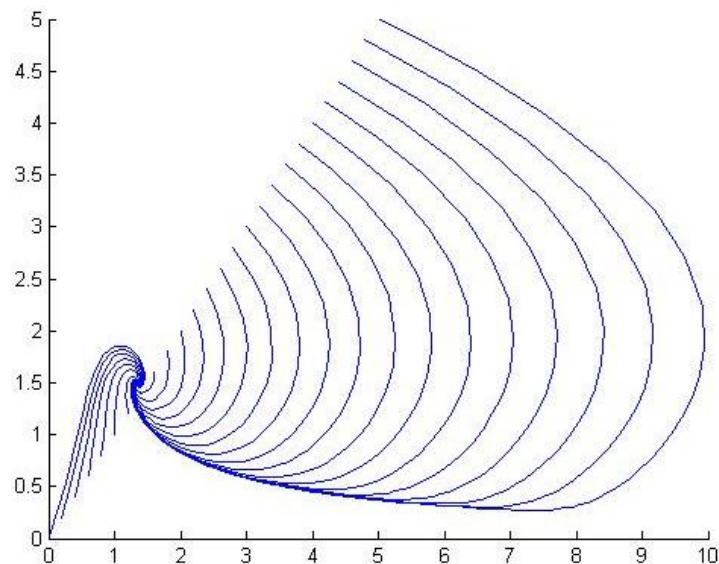


Рисунок 5 — Фазовый портрет с шагом

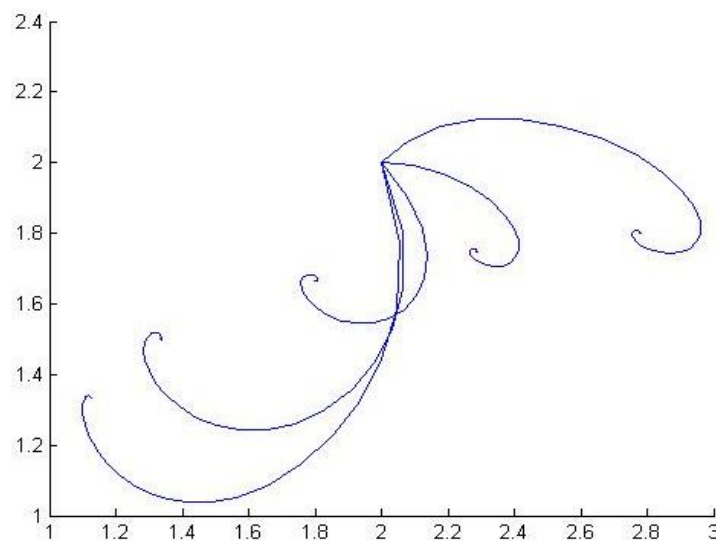


Рисунок 6 — Фазовый портрет с одним параметром, состоящим из массива

Выводы

Рассмотренная динамическая система «посредническая деятельность» не имеет решения в явном виде, однако она позволяет получить важные для экономиста ответы на вопросы: как с

течением времени будут изменяться величины $x(t)$ — количество денег, $y(t)$ — количество товара типа Y , если известны их значения в произвольно фиксированный момент времени.

Библиографический список

1. *Bratishchev, A. V., Batishcheva, G. A., Zhuravliova, M. I.* Bifurcation analysis and synergetic management of dynamic system «Intermediary activity» // Advances in intelligent systems and computing. — 2019. — Vol. 896. — P. 659–667.

2. *Братищев, А. В., Батищева, Г. А., Журавлёва, М. И.* Бифуркационный анализ и синергетическое управление динамической системой «посредническая деятельность» // Интеллектуальные ресурсы — региональному развитию. — 2018. — № 1. — Т. 4. — С. 2009–2013.

3. *Братищев, А. В., Журавлёва, М. И.* Бифуркационный анализ и синергетическое управление системой «валовой продукт — трудовой ресурс» // Вестник РГЭУ (РИНХ). — 2015. — № 2 (50). — С. 147–155.

4. *Баутин, Н. Н., Леонтович, Е. А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. — М. : Мир, 1990.

5. *Колесников, А. А.* Синергетические методы управления сложными системами. Теория системного анализа. — М. : КомКнига, 2006.

6. *Милованов, В. П.* Неравновесные социально-экономические системы: си-

Bibliographic list

1. *Bratishchev, A. V., Batishcheva, G. A., Zhuravliova, M. I.* Bifurcation analysis and synergetic management of dynamic system «Intermediary activity» // Advances in Intelligent Systems and Computing. — 2019. — Vol. 896. — P. 659–667.

2. *Bratishchev, A. V., Batischeva, G. A., Zhuravliova, M. I.* Bifurcation analysis and synergetic management of dynamic system «Intermediary activity» // Intellectual resources for regional development. — 2018. — № 1. — Vol. 4. — P. 2009–2013.

3. *Bratishchev, A. V., Zhuravliova, M. I.* Bifurcation analysis and synergetic management of system «gross product-labor resource» // Vestnik of RSUE (RINH). — 2015. — № 2 (50). — P. 147–155.

4. *Bautin, N. N., Leontovich, E. A.* Methods and techniques of qualitative research of dynamic systems on the plane. — M. : Mir, 1990.

5. *Kolesnikov, A. A.* Synergetic methods of control over complex systems. Theory of system analysis. — M. : Komkniga, 2006.

6. *Milovanov, V. P.* Nonequilibrium socio-economic systems: synergetics and self-organization. — M., 2001.